https://bit.ly/2OWCVNI

KYOTO UNIVERSITY

統計的モデリング基礎④
～最尤推定～

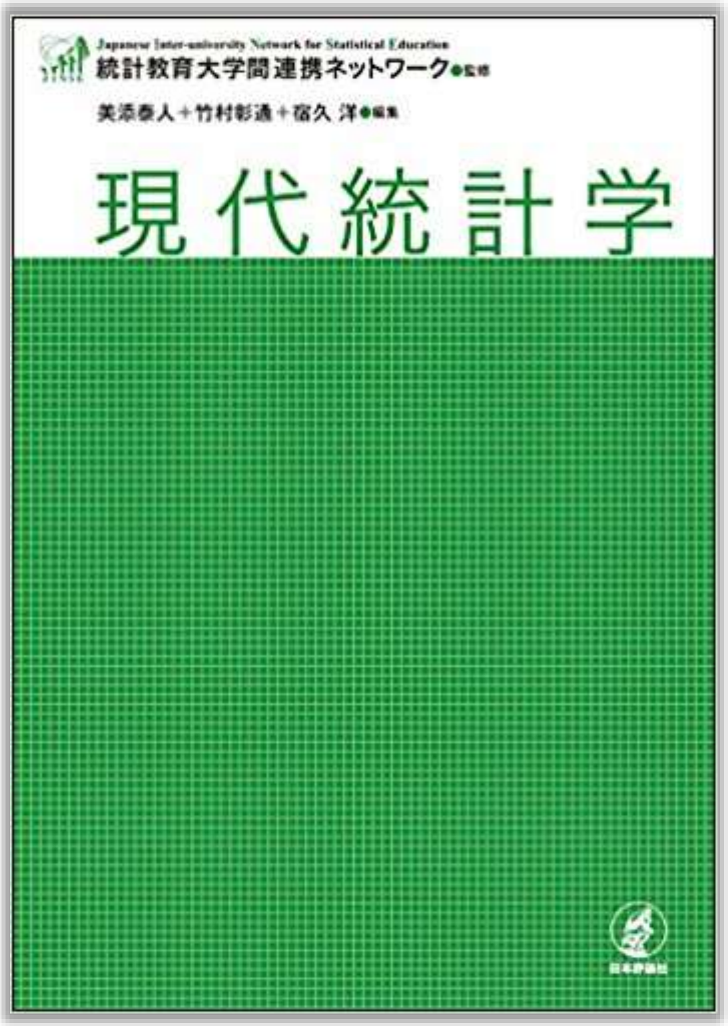
鹿島久嗣
（情報学科 計算機科学コース）

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE
AND TECHNOLOGY

中間テスト：
6/5(水) 4限 場所はここ

- 講義内で行います
- 範囲は第１～７回
- 持ち込み等なし

（いろいろな話題についての）参考書



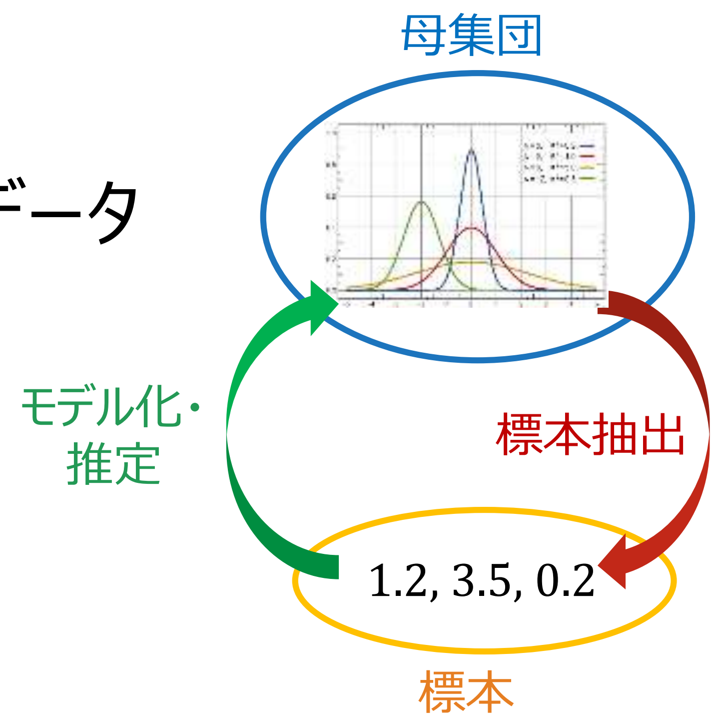
現代統計学

出版社：日本評論社
発刊年月： 2017.03
ISBN ： 978-4-535-78818-3
A5判；256ページ

幅広いトピックで基本的事項がコンパクトにまとまっている

統計モデリングの考え方：部分から全体について知る

- 母集団：確率分布で表される、我々が本当に興味のある集合
  – 分布のクラスやパラメータで指定されるとする
- 標本：実際に観測できる母集団の一部
  – 確率分布に従って抽出された具体的なデータ
- 目的：
  標本から母集団について推測する
  （標本抽出の逆）
  – パラメータを推定する（どうやって？）



パラメータの推定問題：
サイコロの各目の出る確率を実際の出目から推定する

- 母集団は離散分布に従うとする
  - $P(X = k) = f(k)$（ただし$\sum_{k \in \mathcal{X}} f(k) = 1, f(k) \geq 0$）
  - たとえば（厳密な）サイコロであれば$P(X = k) = \frac{1}{6} \approx 0.17$
- 標本抽出：
  - 20回（独立に）振ったところ、
    6 3 5 1 3 1 4 1 2 2 6 1 2 2 5 4 4 4 6 5 が出た

出目	1	2	3	4	5	6
回数	4	4	2	4	3	3

- 母集団のパラメータ（それぞれの目の出る確率）は？

サイコロの推定問題へのひとつの解：出た目の回数の割合で推定する

- ひとつのアイディア：
  20回中で1が4回出たのだから$P(X=1) \approx \frac{4}{20} = 0.2$と推定する

出目	1	2	3	4	5	6
回数	4	4	2	4	3	3
確率の推定値	0.2	0.2	0.1	0.2	0.15	0.15

- 正解が約0.17なので悪くない…
- この推定値はどのような原理に基づいているのか？

最尤推定：
確率分布の代表的な推定手法のひとつ

- 標本からの母集団確率分布の推定
- 代表的な推定手法
  - 最尤推定
  - モーメント推定
  - ベイズ推定
  - …

最尤推定とは：
標本をもっともよく再現するパラメータを推定値とする

- n個のデータ： $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が生成される確率（尤度）：

$$L = P(X = x_1)P(X = x_2)\cdots P(X = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

- サイコロの例：
  - 目kが出る確率をp_k, 目kが出た回数をn_kとする
  - 尤度$L(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_6^{n_6} = \prod_{k=1}^{6} p_k^{n_k}$
  - これを最大化する$p_1, p_2, \ldots, p_n$を求める（最大化問題を解く）と $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n_1+n_2+\cdots+n_6}$

サイコロの最尤推定：
ラグランジュの未定乗数法によって推定値が求まる

- 尤度の代わりに対数尤度を最大化すると扱いやすい（解は変わらない）：

$$\log L(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{6} n_k \log p_k$$

- 確率分布の制約: $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1, p_k > 0$
- ラグランジュ未定乗数法：

$$G\left(\{p_k\}_{k=1}^{6}, \lambda\right) = \sum_{k=1}^{6} n_k \log p_k + \lambda\left(1 - \sum_{k=1}^{6} p_k\right)$$

応用問題：
どちらのサイコロが使われた？

- ２つの（いびつな）サイコロA, Bがある
  - サイコロAを20回振ったところ：

出目	1	2	3	4	5	6
回数	5	1	4	2	4	4

  - サイコロBを16回振ったところ：

出目	1	2	3	4	5	6
回数	2	8	2	2	1	1

- 2つのサイコロのいずれかを選んで（Cとする）5回振ったところ：

出目	1	2	3	4	5	6
回数	1	1	0	2	0	1

- 使われたサイコロはA, Bのいずれだろうか？（C=A or C=B?）

ベイズ決定：
事後確率によって決定する

- A, B どちらのサイコロを選んだかを確率変数Xで表す
  - 事前確率：でたらめに選ぶと $P(X=\mathrm{A})=P(X=\mathrm{B})=1/2$
  - 何も情報がなければこれ以上はわからない
- 事後分布：C（A, Bのいずれか）振って出たデータDを見たあとのXの確率分布 $P(X|D)$によって判断
  - 事後確率が$P(X=\mathrm{A}|D)>P(X=\mathrm{B}|D)$であれば、Aが使われた可能性が高い
- 事後確率の計算： $P(X|D)=\dfrac{P(D|X)P(X)}{P(D)}$ （ベイズの定理）

事後確率の計算：
ベイズの定理と最尤推定で事後確率を計算

- 事後確率の計算には「ベイズの定理」：

事前確率
（今回は1/2）

$$P(X|D) = \frac{P(D|X)P(X)}{P(D)}$$

– 判断基準：$P(X = \mathrm{A}|D) \gtrless P(X = \mathrm{B}|D)$

$\leftrightarrow\ P(D|X = \mathrm{A})P(X = \mathrm{A}) \gtrless P(D|X = \mathrm{B})P(X = \mathrm{B})$

– 注意：分母$P(D) = \sum_X P(D|X)P(X)$を計算する必要はない

- サイコロのパラメータ$\{p_k^{\mathrm{A}}\}_{k=1}^{6}, \{p_k^{\mathrm{B}}\}_{k=1}^{6}$は最尤推定によって推定

サイコロCの出目回数

- $P(D|X = \mathrm{A}) = \prod_{k=1}^{6} {p_k^{\mathrm{A}}}^{n_k^{\mathrm{C}}} \gtrless P(D|X = \mathrm{B}) = \prod_{k=1}^{6} {p_k^{\mathrm{B}}}^{n_k^{\mathrm{C}}}$で判断

- では、サイコロAが2個サイコロBが1個あった場合にはどうなる？

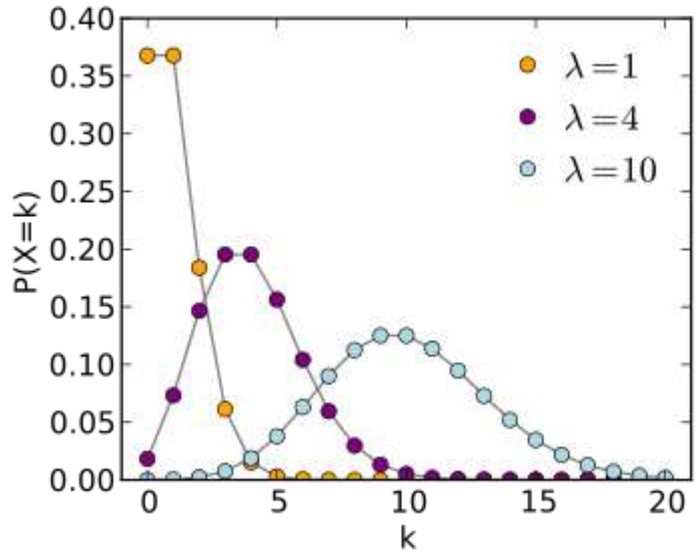
ポアソン分布の最尤推定：標本平均がパラメータの最尤推定量になる

- ポアソン分布：$P(X = k \mid \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$
- データ：$x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対する対数尤度：

$$L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log P(X = x_i \mid \lambda) = \log \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda + \text{const.}$$

- パラメータの最尤推定量：

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$



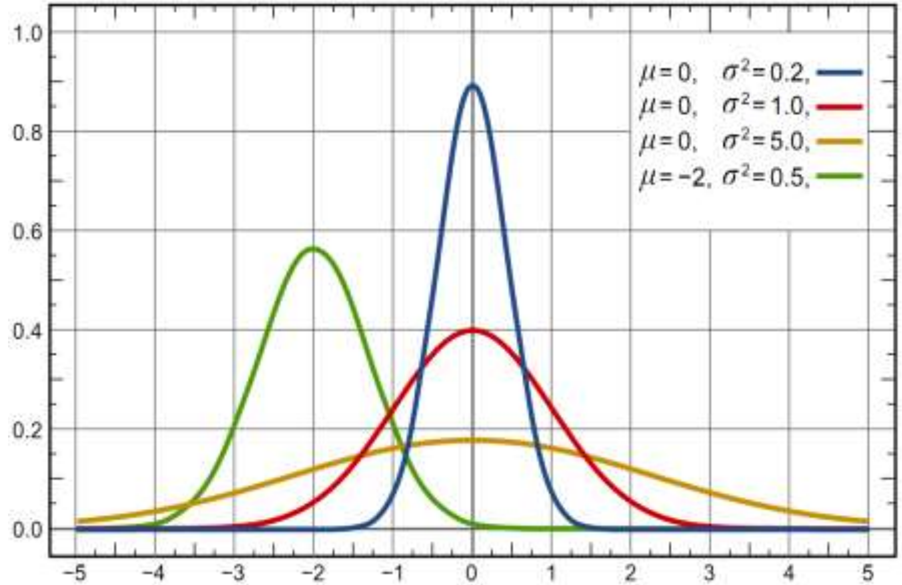
https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution#/media/File:Poisson_pmf.svg

練習：
正規分布のパラメータの最尤推定

- 正規分布：$f(x) = N(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- パラメータ：平均μと分散σ^2の最尤推定量を求めてみよう

1. データ：$x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対する対数尤度をつくる
2. パラメータについての最大化問題を解く

$f(x)$



x