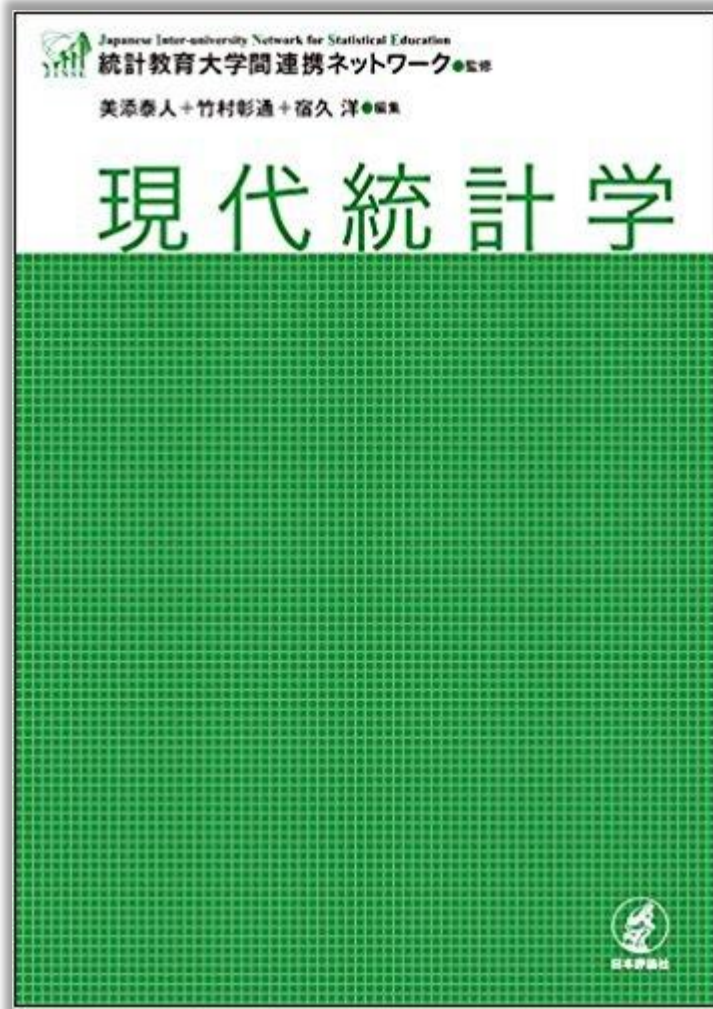


統計的モデリング基礎④

～最尤推定～

鹿島久嗣
(情報学科 計算機科学コース)

(いろいろな話題についての) 参考書



現代統計学

出版社：日本評論社

発刊年月：2017.03

ISBN：978-4-535-78818-3

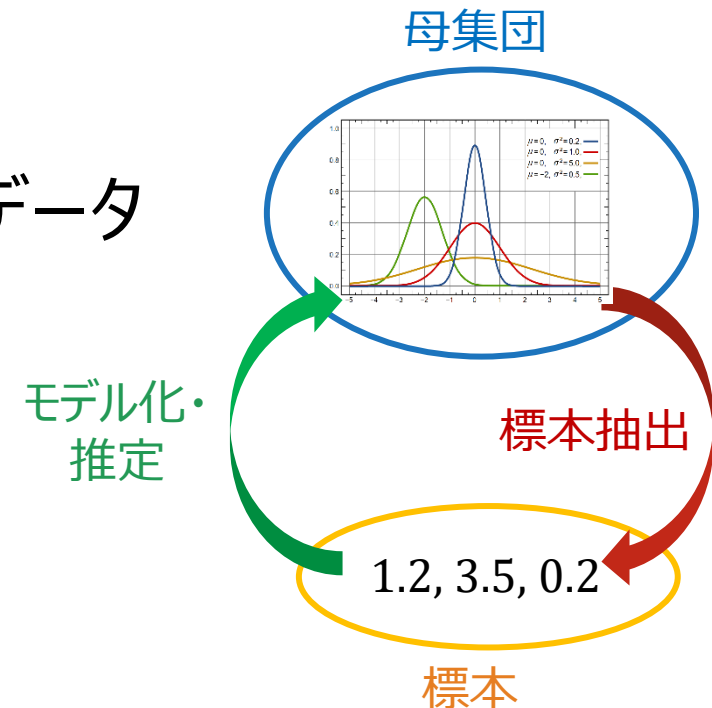
A5判；256ページ

幅広いトピックで基本的事項がコンパクトにまとまっている

最尤推定

統計モデリングの考え方： 部分から全体について知る

- 母集団：確率分布で表される、我々が本当に興味のある集合
 - 分布のクラスやパラメータで指定されるとする
- 標本：実際に観測できる母集団の一部
 - 確率分布に従って抽出された具体的なデータ
- 目的：
標本から母集団について推測する
(標本抽出の逆)
 - パラメータを推定する (どうやって?)



パラメータの推定問題：

サイコロの各目の出る確率を実際の出目から推定する

- 母集団は離散分布に従うとする

– $P(X = k) = f(k)$ (ただし $\sum_{k \in \mathcal{X}} f(k) = 1, f(k) \geq 0$)

– たとえば (厳密な) サイコロであれば $P(X = k) = \frac{1}{6} \approx 0.17$

- 標本抽出：

– サイコロを20回 (独立に) 振ったところ、

6 3 5 1 3 1 4 1 2 2 6 1 2 2 5 4 4 4 6 5 が出た

出目	1	2	3	4	5	6
回数	4	4	2	4	3	3

- 母集団のパラメータ (それぞれの目の出る確率) を推定したい

サイコロのパラメータ推定問題へのひとつの解： 出た目の回数の割合で推定する

- ひとつのアイデア：

20回中で1が4回出たのだから $P(X = 1) \approx \frac{4}{20} = 0.2$ と推定する

出目	1	2	3	4	5	6
回数	4	4	2	4	3	3
確率の推定値	0.2	0.2	0.1	0.2	0.15	0.15

- 正解が約0.17なので悪くない...
- この推定値はどのような原理に基づいているのか？

最尤推定： 確率分布の代表的な推定手法のひとつ

- 標本からの母集団確率分布の推定
- 代表的な推定手法
 - 最尤推定
 - モーメント推定
 - ベイズ推定
 - ...

最尤推定とは：

標本をもっともよく再現するパラメータを推定値とする

- n 個のデータ： x_1, x_2, \dots, x_n が生成される確率（尤度）：

$$L = P(X = x_1)P(X = x_2) \cdots P(X = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i)$$

独立性を仮定しているので積になる

- サイコロの例：

– 目 k が出る確率を p_k , 目 k が出た回数を n_k とする

– 尤度 $L(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_6^{n_6} = \prod_{k=1}^6 p_k^{n_k}$

– これを最大化する p_1, p_2, \dots, p_n を求める（最大化問題を解く）と

$$\hat{p}_k = \frac{n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_6}$$

サイコロ（離散分布）の最尤推定： ラグランジュの未定乗数法によって推定値が求まる

- 尤度の代わりに対数尤度を最大化すると扱いやすい（解は変わらない）：

$$\log L(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^6 n_k \log p_k$$

- 確率分布の制約: $\sum_{k=1}^6 p_k = 1, p_k > 0$

$\{p_k\}_{k=1}^6, \lambda$ について最大化する

- ラグランジュ未定乗数法：

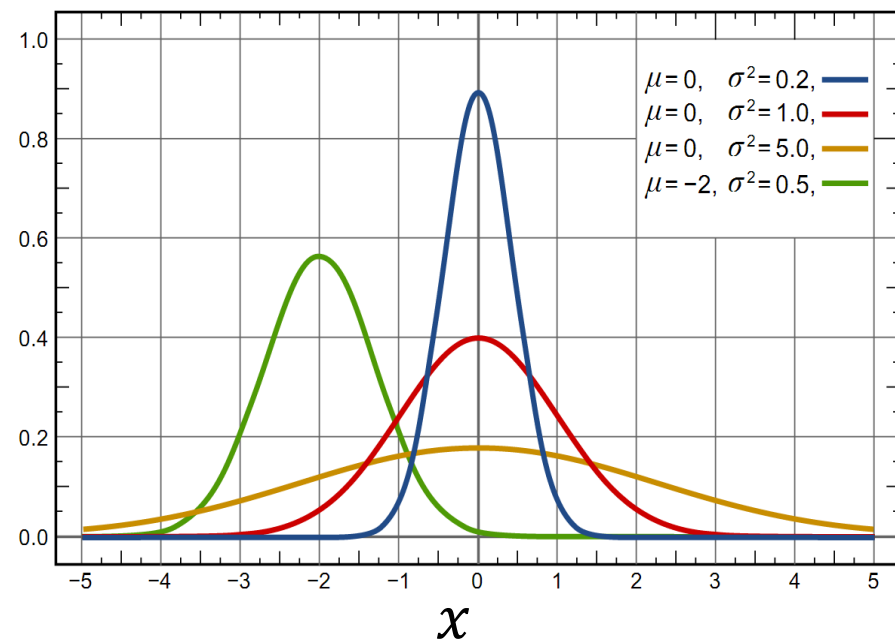
$$G(\{p_k\}_{k=1}^6, \lambda) = \sum_{k=1}^6 n_k \log p_k + \lambda \left(1 - \sum_{k=1}^6 p_k \right)$$

練習：

正規分布のパラメータの最尤推定

- 正規分布： $f(x) = N(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- パラメータ：平均 μ と分散 σ^2 の最尤推定量を求めてみよう
 1. データ： x_1, x_2, \dots, x_n に対する対数尤度をつくる
 2. パラメータについての最大化問題を解く

$f(x)$



ベイズ決定

応用問題：

どちらのサイコロが使われた？

- 2つの（いびつな）サイコロA, Bがある

–サイコロAを20回振ったところ：

出目	1	2	3	4	5	6
回数	5	1	4	2	4	4

–サイコロBを16回振ったところ：

出目	1	2	3	4	5	6
回数	2	8	2	2	1	1

応用問題：

どちらのサイコロが使われた？

- (いびつな) サイコロA, Bのパラメータの最尤推定値は：

–サイコロA：

出目	1	2	3	4	5	6
確率	$5/20$	$1/20$	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$4/20$

–サイコロB：

出目	1	2	3	4	5	6
確率	$2/16$	$8/16$	$2/16$	$2/16$	$1/16$	$1/16$

応用問題：

どちらのサイコロが使われた？

- (いびつな) サイコロA, Bのパラメータの最尤推定値は：

–サイコロA：

出目	1	2	3	4	5	6
確率	5/20	1/20	4/20	2/20	4/20	4/20

–サイコロB：

出目	1	2	3	4	5	6
確率	2/16	8/16	2/16	2/16	1/16	1/16

- 今、2つのサイコロのいずれかを選んで (Cとする) 5回振ったところ：

出目	1	2	3	4	5	6
回数	1	1	0	2	0	1

- 使われたサイコロはA, Bのいずれだろうか？ (C=A or C=B?)

ベイズ決定： 事後確率によって決定する

- A, B どちらのサイコロを選んだかを確率変数 X で表す
 - 事前確率：でたらめに選ぶと $P(X = A) = P(X = B) = 1/2$
 - 何も情報がなければこれ以上はわからない
- 事後分布：C (A, Bのいずれか) を振って出たデータ \mathcal{D} を見たあとの、 X の確率分布 $P(X|\mathcal{D})$
- ベイズ決定：事後確率が $P(X = A|\mathcal{D}) > P(X = B|\mathcal{D})$ であれば、Aが使われた可能性が高いと判断できる
- 事後確率の計算：
$$P(X|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{D}|X)P(X)}{P(\mathcal{D})}$$
 (ベイズの定理)

出目	1	2	3	4	5	6
回数	1	1	0	2	0	1

事後確率の計算：

ベイズの定理と最尤推定で事後確率を計算

- 事後確率の計算には「ベイズの定理」をつかう：

$$P(X|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{D}|X)P(X)}{P(\mathcal{D})}$$

$P(X)$ は事前確率
(今回は1/2)

T. Bayes.



– 判断基準： $P(X = A|\mathcal{D}) \geq P(X = B|\mathcal{D})$

$$\leftrightarrow P(\mathcal{D}|X = A)P(X = A) \geq P(\mathcal{D}|X = B)P(X = B)$$

– 注意：分母 $P(\mathcal{D}) = \sum_X P(\mathcal{D}|X)P(X)$ は今回は計算する必要はない

- サイコロのパラメータ $\{p_k^A\}_{k=1}^6$, $\{p_k^B\}_{k=1}^6$ は最尤推定によって推定

サイコロの出目回数

- $P(\mathcal{D}|X = A) = \prod_{k=1}^6 p_k^A n_k^C \geq P(\mathcal{D}|X = B) = \prod_{k=1}^6 p_k^B n_k^C$ で判断

線形回帰モデルの確率的解釈



最尤推定：

データをもっともよく再現するパラメータを推定値とする

- n 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_n から確率モデル $f(x | \theta)$ のパラメータ θ を推定したい

- n 個のデータが（互いに独立に）生成される確率（尤度）：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

- 尤度最大になるパラメータを推定値 $\hat{\theta}$ とする

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^n \log f(x_i | \theta)$$

実際には対数尤度で扱うことが多い

—もっともデータを生成する確率が高い（「最も尤もらしい」）

線形回帰モデルの最尤推定： 線形回帰の確率モデルを考える

- データ： $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ と $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$ に
線形モデル： $g(x) = \beta x + \alpha$ を当てはめる
- 最小二乗法： $\ell(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2$ を最小化
- 一方、線形回帰モデルに対応する確率モデルを仮定する：
 - 正規分布： $y^{(i)}$ は平均 $\beta x^{(i)} + \alpha$, 分散 σ^2 の正規分布に従う
 - 確率密度： $f(y^{(i)} | x^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2}{2\sigma^2}\right)$
 - 「平均的に」回帰直線 $y = \beta x + \alpha$ に乗るデータを生成するモデル

線形回帰モデルの最尤推定：

線形回帰の確率モデルの最尤推定 = 最小二乗法

- 線形回帰モデルに対応する確率モデルを考える：

- 確率密度関数：
$$f(y^{(i)} | x^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 対数尤度：
$$L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \log f(y^{(i)} | x^{(i)})$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2 + \text{const.}$$

- 対数尤度を α, β について最大化すること（最尤推定）
= 二乗誤差を α, β について最小化すること（最小二乗法）

線形回帰モデルの最尤推定： 分散の最尤推定量

- 確率密度関数： $f(y^{(i)} | x^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2}{2\sigma^2}\right)$

- 分散については、対数尤度：

$$L(\sigma^2) = n \log \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2 + \text{const.}$$

- $L(\sigma^2)$ を最大化する最尤推定量は：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2$$

※ 以上の議論は重回帰モデルの場合も同様

最尤推定の性質

最尤推定量の性質： 一貫性

- パラメータ θ の推定量として $\hat{\theta}$ を得たとする（例えば最尤推定で）
- 推定量の良さはどのように評価するか？

– 不偏性 $E[\hat{\theta}] = \theta$: 推定量の期待値が真の値に一致する

- E は様々な標本の採り方についての期待値を表す
- たとえば、平均の最尤推定量は不偏性をもつが、分散の最尤推定量はもたない

– 一貫性：標本サイズを大きくしていくと真の値に一致する：

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$$

- 最尤推定は、適当な条件のもと一貫性をもつ

漸近正規性：

最尤推定は漸近正規性をもつ

- 最尤推定量の分布は $n \rightarrow \infty$ で、真のパラメータ θ を平均とする正規分布に従う

- もう少し厳密にいうと：

$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ の分布が平均0、分散 $I(\theta)^{-1}$ の正規分布に近づく

- $I(\theta)$ はフィッシャー情報量：

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right]$$
$$= - \int \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right) f(x|\theta) dx$$

$I(\theta)$ が大きいほど、対数尤度関数が、真値の周りで「尖っている」イメージ

- $n \rightarrow \infty$ で $\hat{\theta} \rightarrow \theta$

最尤推定の利点： モデリングの自動化

- 最尤推定の利点：確率モデルの形（データの生成プロセスの仮定）を決めればモデルパラメータが自動的に決まる
 - ただし、最後に最大化問題を解いて、パラメータ推定量を求める必要がある
 - 離散分布、ポアソン分布、正規分布などは解析的に解が求まる
 - 線形回帰（正規分布でノイズが載る）は連立方程式（いちおう解析的な解）
 - ただし、他の多くのモデルでは、最適化問題を数値的に解く必要がある

ポアソン回帰

ポアソン分布の最尤推定： 標本平均がパラメータの最尤推定量になる

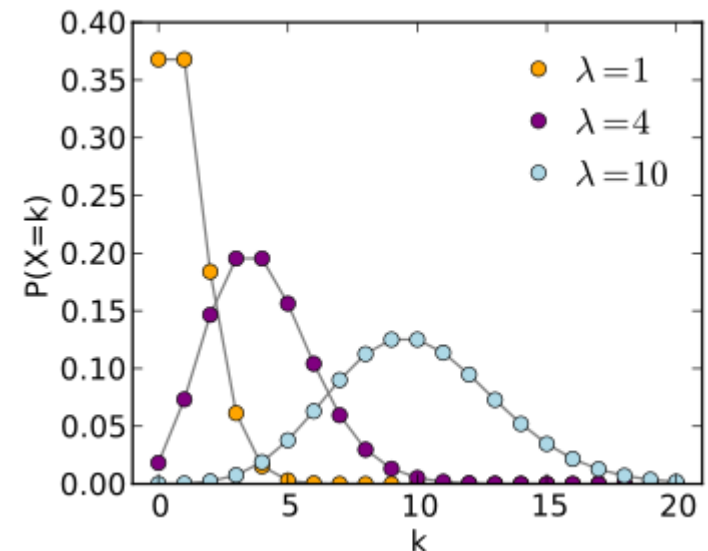
- ポアソン分布： $P(Y = y \mid \lambda) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda)$

- データ： y_1, y_2, \dots, y_n に対する対数尤度：

$$L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log P(Y = y_i \mid \lambda) = \log \lambda \sum_{i=1}^n y_i - n\lambda + \text{const.}$$

- パラメータの最尤推定量：

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution#/media/File:Poisson_pmf.svg

ポアソン回帰： 非負整数の回帰モデル

- 例えば、ある機械の各日の故障件数をモデル化したいとする
 - 曜日や気温などに依存して平均的な故障件数が変わるとする
- 独立変数（曜日など）に依存する回数のモデル：ポアソン回帰

$$P(Y = y \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{(\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}))^y}{y!} \exp(-\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}))$$

–ポアソン分布の平均が線形モデルで表されるとする：

- ポアソン分布： $P(Y = y \mid \lambda) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda)$
 - 重回帰モデル： $\lambda = \exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x})$
- } 組み合わせる

ポアソン回帰の最尤推定： 解析解は得られなさそう...

- 独立変数： $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$ # n 日分の測定
- 従属変数： $(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$ # n 日分の故障数
- 対数尤度（最大化問題）：

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{i=1}^n \log \frac{\left(\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)})\right)^{y^{(i)}}}{y^{(i)}!} \exp(-\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)})) \\ &= \sum_{i=1}^n y^{(i)} \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)} - \sum_{i=1}^n \exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)}) + \text{const.} \end{aligned}$$

- これを最大化する $\boldsymbol{\beta}$ を求めたいが、解析解は得られない