

# 統計的モデリング基礎④

## ～最尤推定（続き）～

鹿島久嗣  
(情報学科 計算機科学コース)

# 線形回帰モデルの確率的解釈



# 最尤推定：

データをもっともよく再現するパラメータを推定値とする

- $n$ 個のデータ  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  から確率モデル  $f_{\theta}(x)$  のパラメータ  $\theta$  を推定したい

- $n$ 個のデータが（互いに独立に）生成される確率（尤度）：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x^{(i)})$$

- 尤度最大になるパラメータを推定値  $\hat{\theta}$  とする

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x^{(i)}) = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(x^{(i)})$$

実際には対数尤度で扱うことが多い

– もっともデータを生成する確率が高い（「最も尤もらしい」）

# 線形回帰モデルの最尤推定： 線形回帰の確率モデルを考える

- データ： $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  と  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$  に  
線形モデル： $g(x) = \beta x + \alpha$  を当てはめる
- 最小二乗法： $\ell(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2$  を最小化
- 一方、線形回帰モデルに対応する確率モデルを仮定する：
  - 正規分布： $y^{(i)}$  は平均  $\beta x^{(i)} + \alpha$  , 分散  $\sigma^2$  の正規分布に従う
  - 確率密度： $f(y^{(i)} | x^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2}{2\sigma^2}\right)$
  - 「平均的に」回帰直線  $y = \beta x + \alpha$  に乗るデータを生成するモデル

# 線形回帰モデルの最尤推定：

## 線形回帰の確率モデルの最尤推定 = 最小二乗法

- 線形回帰モデルに対応する確率モデルを考える：

- 確率密度関数：
$$f(y^{(i)} | x^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 対数尤度：
$$L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \log f(y^{(i)} | x^{(i)})$$

注：ここでは $y^{(i)}$ が  
「再現されるべき」  
データ

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2 + \text{const.}$$

- 対数尤度を $\alpha, \beta$ について最大化すること（最尤推定）  
= 二乗誤差を $\alpha, \beta$ について最小化すること（最小二乗法）

# 線形回帰モデルの最尤推定： 分散の最尤推定量

- 確率密度関数： $f(y^{(i)} | x^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2}{2\sigma^2}\right)$

- 分散については、対数尤度：

$$L(\sigma^2) = n \log \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2 + \text{const.}$$

- $L(\sigma^2)$ を最大化する最尤推定量は：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - (\beta x^{(i)} + \alpha))^2$$

※ 以上の議論は重回帰モデルの場合も同様

# 最尤推定の性質

# 最尤推定量の性質： 一貫性

- パラメータ $\theta$ の推定量として $\hat{\theta}$ を得たとする（例えば最尤推定で）
- 推定量の良さはどのように評価するか？

– 不偏性  $E[\hat{\theta}] = \theta$  : 推定量の期待値が真の値に一致する

- $E$ は様々な標本の採り方についての期待値を表す
- たとえば、平均の最尤推定量は不偏性をもつが、分散の最尤推定量はもたない

– 一貫性：標本サイズを大きくしていくと真の値に一致する：

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$$

- 最尤推定は、適当な条件のもと一貫性をもつ



## 漸近正規性：

### 最尤推定量は漸近的に正規分布に従う

- 最尤推定量の分布は  $n \rightarrow \infty$  で、真のパラメータ  $\theta$  を平均とする正規分布に従う
- もう少し厳密にいうと：  
 $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  の分布が平均0、分散  $I(\theta)^{-1}$  の正規分布に近づく

- $I(\theta)$  はフィッシャー情報量：

$$I(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right]$$
$$= - \int \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right) f(x|\theta) dx$$

$I(\theta)$  が大きいほど、対数尤度関数が、真値の周りで「尖っている」イメージ

- $n \rightarrow \infty$  で  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$

# ポアソン回帰

# 最尤推定：

データをもっともよく再現するパラメータを推定値とする

- $n$ 個のデータ  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  から確率モデル  $f_{\theta}(x)$  のパラメータ  $\theta$  を推定したい

- $n$ 個のデータが（互いに独立に）生成される確率（尤度）：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x^{(i)})$$

実際には対数尤度で扱うことが多い

- 尤度最大になるパラメータを推定値  $\hat{\theta}$  とする

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x^{(i)}) = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(x^{(i)})$$

–もっともデータを生成する確率が高い（「最も尤もらしい」）

# ポアソン分布の最尤推定： 標本平均がパラメータの最尤推定量になる

■ ポアソン分布： $f_{\lambda}(Y = y) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda)$

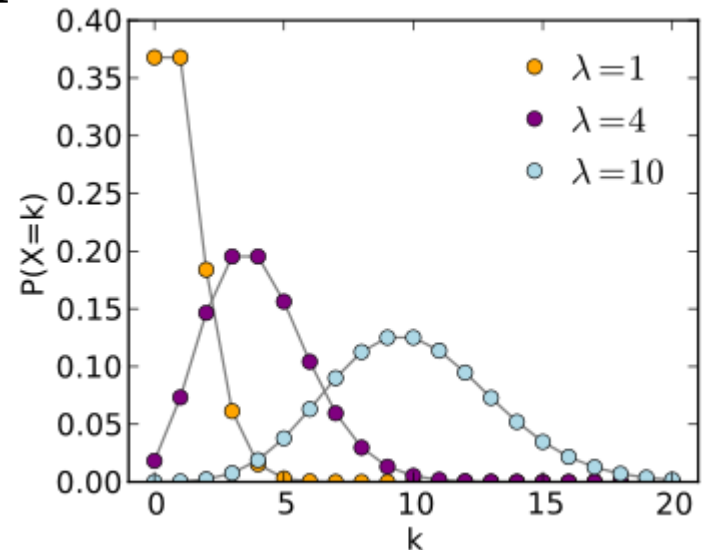
$\lambda > 0$ は平均に相当するパラメータ

■ データ： $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ に対する対数尤度：

$$L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log f_{\lambda}(Y = y^{(i)}) = \log \lambda \sum_{i=1}^n y^{(i)} - n\lambda + \text{const.}$$

■ パラメータの最尤推定量：

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n y^{(i)}}{n}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson\\_distribution#/media/File:Poisson\\_pmf.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution#/media/File:Poisson_pmf.svg)

# ポアソン回帰： 非負整数の回帰モデル

- 例えば、ある機械の各日の故障件数をモデル化したいとする
  - 曜日や気温などに依存して平均的な故障件数が変わるとする
- 独立変数（曜日など）に依存する回数のモデル：ポアソン回帰

$$f_{\boldsymbol{\beta}}(Y = y) = \frac{(\exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}))^y}{y!} \exp(-\exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}))$$

–ポアソン分布の平均が線形モデルで表されるとする：

- ポアソン分布： $f_{\lambda}(Y = y) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda)$
  - 重回帰モデル： $\lambda = \exp(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x})$
- } 組み合わせる

# ポアソン回帰の最尤推定： 解析解は得られなさそう...

- 独立変数： $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$  #  $n$ 日分の測定
- 従属変数： $(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$  #  $n$ 日分の故障数
- 対数尤度（最大化問題）：

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{i=1}^n \log \frac{\left(\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)})\right)^{y^{(i)}}}{y^{(i)}!} \exp(-\exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)})) \\ &= \sum_{i=1}^n y^{(i)} \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)} - \sum_{i=1}^n \exp(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}^{(i)}) + \text{const.} \end{aligned}$$

- これを最大化する $\boldsymbol{\beta}$ を求めたいが、解析解は得られない

# 最尤推定の利点： モデリングの自動化

- 最尤推定の利点：確率モデルの形（データの生成プロセスの仮定）を決めればモデルパラメータが自動的に決まる
  - ただし、最後に最大化問題を解いて、パラメータ推定量を求める必要がある
  - 離散分布、ポアソン分布、正規分布などは解析的に解が求まる
  - 線形回帰（正規分布でノイズが載る）は連立方程式（いちおう解析的な解）
  - ただし、他の多くのモデルでは、最適化問題を数値的に解く必要がある