http://goo.gl/PXyycQ

KYOTO UNIVERSITY

情報理論 第12回
アナログ情報源①

鹿島久嗣
京都大学 情報学研究科 知能情報学専攻

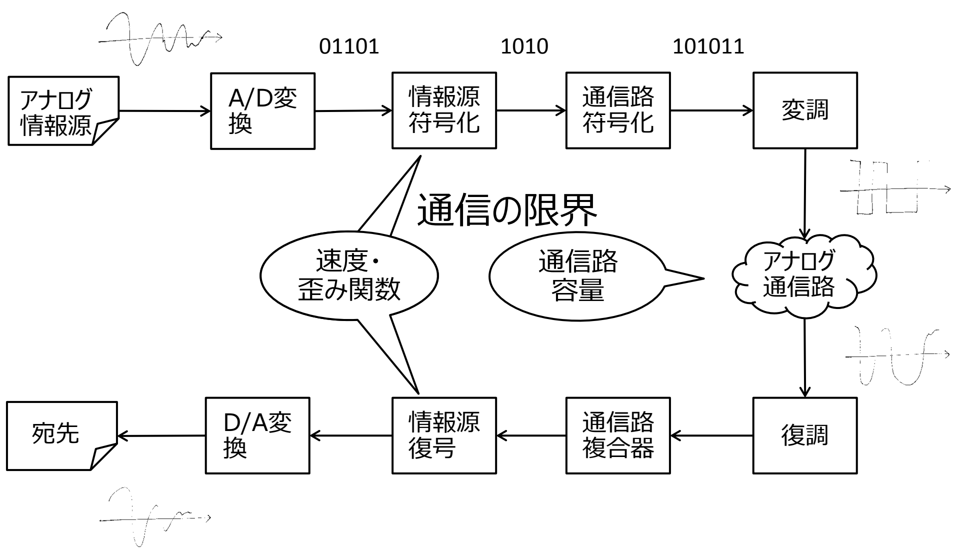
DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY

アナログ情報源：実は世の中はアナログ情報だらけ

- これまでの枠組みはディジタル的な情報を対象
- 一方、身の回りにはアナログ情報も多い：
  - –アナログ情報源： 音声、画像など
  - –アナログ通信路：物理レベルではアナログ
- アナログ情報をディジタル近似すれば、これまでの枠組みに載る

→ どのように行えば、うまく扱えるか？

アナログ情報通信のモデル：
アナログ⇔ディジタル情報処理のプロセス



この後の話：

- フーリエ変換
- 標本化定理：時間方向の離散化
- 情報源符号化：アナログ情報源の離散化
- アナログ情報源のエントロピー
- アナログ通信路

フーリエ変換

フーリエ級数：
周期信号を、単純な形の周期性をもつ関数で展開

- 扱いたいアナログ波形 $x(t)$ は有限の時間区間 - $T/2 \le t \le T/2$ をとると、正弦波と余弦波の和として表せる
- $\Delta f = 1/T$ として、フーリエ級数を：

$$x(t) = a_0 / 2 + \sum_{k=1,\ldots,\infty} \Big(\overbrace{a_k \cos 2\pi \underbrace{k\Delta f}_{\text{周波数}}\, t + b_k \sin 2\pi \underline{k\Delta f}\, t}^{\text{周波数 } k\Delta f \text{ の成分}} \Big)$$

  – なお、フーリエ係数：
    - $a_k = (2 / T) \int_{-T/2 \le t \le T/2} x(t) \cos 2\pi\, k\Delta f\, t\, \mathrm{d}t$
    - $b_k = (2 / T) \int_{-T/2 \le t \le T/2} x(t) \sin 2\pi\, k\Delta f\, t\, \mathrm{d}t$

複素フーリエ級数：フーリエ級数のシンプルな表現

- 複素フーリエ級数：

$x(t) = a_0 / 2 + \sum_{k=1,\dots,\infty} (a_k \cos 2\pi k\Delta f\, t + b_k \sin 2\pi k\Delta f\, t)$
$\quad = \sum_{-\infty \le k \le \infty} c_k e^{i2\pi k\Delta f t}$

– i を虚数単位として $e^{i2\pi k\Delta f t} = \cos 2\pi k\Delta f\, t + i \sin 2\pi k\Delta f\, t$

–これを用いて周波数 $k\Delta f$ の成分を書き換えると：
$a_k \cos 2\pi k\Delta f\, t + b_k \sin 2\pi k\Delta f\, t = c_k e^{i2\pi k\Delta f\, t} + c_{-k} e^{-i2\pi k\Delta f\, t}$

- ただし：
  - $c_k = (a_k + ib_k) / 2$
  - $c_{-k} = (a_k - ib_k) / 2$

– c_k は $c_k = (1 / T) \int_{-T/2 \le t \le T/2} x(t)\, e^{-i2\pi k\Delta f\, t}\, \mathrm{d}t$ とかける

フーリエ級数からフーリエ変換へ：時間領域から周波数領域への変換

- フーリエ級数の和で $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$に対応する
  周波数成分 $f = \dots, -2\Delta f, -\Delta f, 0, \Delta f, 2\Delta f, \dots$
  (周波数成分が $\Delta f = 1/T$ 間隔で表れる)

- 刻み幅 Δf を細かくする（$f = k\Delta f$ として $\Delta f \to 0$ つまり $T \to \infty$ ）
  $X(f) = \lim_{T\to\infty} c_k / \Delta f$
  （フーリエ係数の $k\Delta f - \Delta f/2 \le f \le k\Delta f + \Delta f/2$ での密度 ）
  $= \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2 \le t \le T/2} e^{-i2\pi k\Delta f t}\, \mathrm{d}t$ よって

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty \le t \le \infty} x(t)\, e^{-i2\pi f\, t}\, \mathrm{d}t \quad \text{（フーリエ変換）}}$$

フーリエ逆変換：周波数領域から時間領域への変換

- 一方、$x(t) = \sum_{-\infty \leq k \leq \infty} c_k \, e^{i2\pi k \Delta f \, t}$
- $c_k = X(f)\,\Delta f$ （フーリエ係数）として $\Delta f \to 0$ すると

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty \leq t \leq \infty} X(f)\, e^{i2\pi f\, t}\, \mathrm{d}f \quad \text{（フーリエ逆変換）}}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{時間領域} & & \text{周波数領域} \\ x(t) & \underset{\text{フーリエ逆変換}}{\overset{\text{フーリエ変換}}{\rightleftarrows}} & X(f) \end{array}$$

標本化定理

標本化：
時間方向の離散化

- 波形 $x(t)$ を送信したい場合、時間方向に連続なのでそのままでは送れない
  - 何らかの形で離散化する必要がある
- 時間方向に適当に標本化（値を採取）して送る
  - 時間間隔 $T_s = 1/\ f_s$ で標本化する
  - k = …, -2, -1, 0, 1, 2, …. について標本値 $x(kT_s)$ を採取
- $x(t)$ について何の制限もなければ、標本値からの完全な復元は不可能 → 完全な復元の条件は何だろうか？

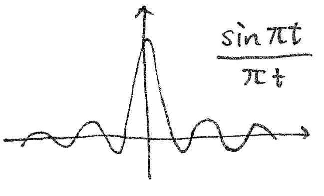
標本化定理：
定期的に採取したデータから元の信号が復元できる条件

- $x(t)$：周波数成分が 0 から W までに限られている波形
- 標本化周波数 $f_s \geq\ 2\ W$ で標本化する（時間間隔 T_s=1/f_s）
- 標本値 $x(kT_s)$ k=…, -2, -1, 0, 1, 2, …. から、

$$x(t) = \sum_{-\infty\leq k\leq\infty} x(kT_s)\ \{\sin \pi f_s\,(t - kT_s)\}\ /\ \{\pi f_s\,(t - kT_s)\}$$

によって元の波形 $x(t)$ を完全に再現できる

- $T_s = 1/\ f_s$



アナログ情報源

アナログ情報源：
実数値の列を生成する情報源への拡張

- 標本化定理によって時間方向の離散化ができたので（帯域制限された）連続的なアナログ波形は実数値の列 $x_0, x_1,\ldots, x_{n\text{-}1}$ として表現される
- 実数値列のもつ情報量等を議論したい
- 連続値列の確率を考える
  - ディジタル： 確率変数 $X_0, X_1,\ldots, X_{n\text{-}1}$ の
    結合確率分布 $P_{X_0, X_1,\ldots, X_{n\text{-}1}}(x_0, x_1,\ldots, x_{n\text{-}1})$ によって定まる
  - アナログ：結合確率密度関数 $p_{X_0, X_1,\ldots, X_{n\text{-}1}}(x_0, x_1,\ldots, x_{n\text{-}1})$
    - 微小区間 $x_i \le X_i \le x_i + \mathrm{d}x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1)$ の確率
      $p_{X_0, X_1,\ldots, X_{n\text{-}1}}(x_0, x_1,\ldots, x_{n\text{-}1})\, \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n\text{-}1}$

アナログ情報源の例：
ガウス情報源

- ガウス分布（正規分布）：各標本値が互いに独立に従う

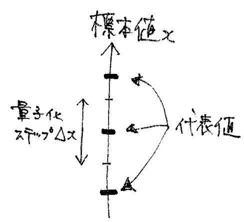
$$p(x) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left\{ -(x-\mu)^2 / (2\sigma^2) \right\}$$

- 記憶の無いガウス情報源：

$$p_{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_i p(x_i)$$

  - 平均 $\mu = 0$ のとき白色ガウス情報源と呼ぶ

アナログ情報源のエントロピー：
量子化したときのエントロピーの極限



- ひとつの標本値を知ったときに得られる情報量
- 量子化：連続値 x を代表値で近似する
  - $[i\Delta x - \Delta x/2, i\Delta x + \Delta x/2]$ に入る値を代表値 $i\Delta x$ で近似する
    - 量子化ステップΔx
- 量子化した情報源$S_{\Delta x}$ のエントロピー：
  $H(S_{\Delta x}) = - \sum_i p_i \log_2 p_i$
    - なお $p_i = \int_{i\Delta x - \Delta x/2 \le x \le i\Delta x + \Delta x/2} p(x)\,\mathrm{d}x \approx p(i\Delta x)\,\Delta x$
- $\Delta x \to 0$の極限を考えると連続情報源のエントロピー
  $H(S_{\Delta x}) = - \sum_i [p(i\Delta x) \log_2 p(i\Delta x)]\,\Delta x \;\; - \log_2 \Delta x$
  $\to\; H(S) = - \int_{-\infty \le x \le \infty} p(x) \log_2 p(x)\,\mathrm{d}x \;\; + \infty$

発散する項は無視