

<http://goo.gl/PXyycQ>

KYOTO UNIVERSITY

情報理論 第13回
アナログ情報源②

鹿島久嗣
京都大学 情報学研究科 知能情報学専攻

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE
AND TECHNOLOGY

最大エントロピー定理

アナログ情報源のエントロピーの最大化： 一様分布では発散してしまう

- デジタル情報源のエントロピーが最大になるのは情報源アルファベットの各記号が等確率で発生するとき
- アナログ情報源の場合：
 - 一様分布の場合のエントロピーを考えると
 - $H(X) = -\int_{-\infty \leq x \leq \infty} p(x) \log_2 p(x) dx$
 $= -\int_{-A \leq x \leq A} 1/(2A) \log_2 1/(2A) dx = \log 2A$
 - これは $A \rightarrow \infty$ すると発散してしまう
 - 標本値の分散（電力）を $E[X^2] \leq P$ のように制限する等の制約を加えて発散を防ぐ

3

KYOTO UNIVERSITY

最大エントロピー定理： 電力制約の下でエントロピーを最大化するのはガウス分布

- エントロピーの発散を防ぐために、標本値の分散（平均電力）を $E[X^2] \leq P$ のように制限する等の制約を加えて発散を防ぐ
- $H(S) = -\int_{-\infty \leq x \leq \infty} p(x) \log_2 p(x) dx$ を電力の制約 $\int_{-\infty \leq x \leq \infty} x^2 p(x) dx \leq P$ のもとで最大化する $p(x)$ を求める変分問題
 - これを解くと、 $p(x)$ は平均0、分散 P のガウス分布となる
- 最大エントロピー定理：
平均電力が P 以下の情報源で、エントロピーを最大化するのは平均電力 P のガウス分布となる

4

KYOTO UNIVERSITY

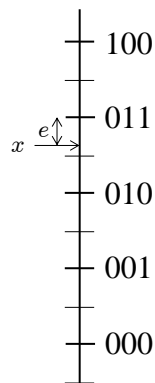
アナログ情報源の符号化

アナログ情報源の符号化： 連続値を量子化（離散化）する

- 時間方向の離散化は標本化定理によって支持される
- 各離散時間における連続値信号の符号化：
 1. 量子化（離散化）を行う
 - アナログ情報源のエントロピーを定義したときのように
 2. デジタル信号に対する情報源符号化を行う

量子化： 量子化により雑音が生じる

- ある有限区間を有限個の量子化ステップに分割する
- 各ステップに属する標本値を代表値で置き換える
 - 信号 x を代表値 (011) で置き換える
 - 量子化雑音 e : もともとの信号 x と代表値の差

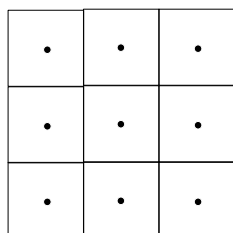


7

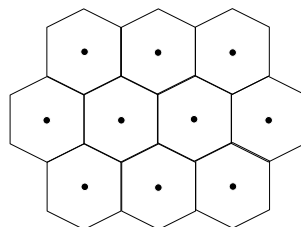
KYOTO UNIVERSITY

ベクトル量子化： 高次元の量子化

- 1次元量子化：ひとつひとつの標本値を量子化する (前頁)
- ベクトル量子化：いくつかの標本値をまとめて量子化する
 - 量子化雑音小さくなる
 - 次元を上げるとより効率化 (ただし構成は自明でない)



1次元量子化



2次元六角形量子化
(量子化雑音の2乗が小さくなる)

8

KYOTO UNIVERSITY

アナログ通信路

アナログ通信路の通信路容量： 通信路符号化定理が同様に成り立つ

- アナログ通信路：入力・出力ともにアナログ波形
 - 帯域制限されていれば、標本値列で考えてよい
- 記憶の無い通信路：入出力関係が条件付確率密度関数 $p(y|x)$ で決まる
 - (加法的) 白色ガウス通信路：
入力信号 x に平均0のガウス分布で雑音加わる
$$p(y|x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -(y-x)^2 / (2\sigma^2) \right\}$$
 - 通常は $E[X^2] \leq S$ のように入力信号の大きさに制限を設ける

アナログ通信路の通信路容量： 通信路符号化定理が同様に成り立つ

- 通信路容量： $C = \max_{p(X)} I(X; Y)$
 - 入力と出力の相互情報量の（入力分布について）最大値
 - 通信路の性能限界
- 通信路符号化定理：（伝送速度が通信路容量よりも小さければ）符号長を大きくすることで複合誤り確率をいくらでも小さくできる

アナログ通信路の符号化

アナログ通信路の符号化：

アナログ通信路を変調・復調によってデジタルに変換

- 通アナログ通信路の符号化
 - 直接的には、実数体上のベクトル空間から、復号誤り率が小さくなるように符号語を選ぶ
 - 一般に困難
 - 現実的には
 1. 変調・復調によってデジタル通信路に変換
 2. デジタル通信路の符号化を行う

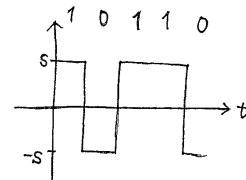
13

KYOTO UNIVERSITY

変調・復調の例：

白色ガウス通信路を仮定すると2元対称通信路になる

- 送信者は0,1をそれぞれ電圧 $+S$, $-S$ のパルスとして送信する
- 受信者は受信した波形を標本化して、その正負によって0,1の判定を行う
- 通信路は分散 σ^2 の白色ガウス通信路とする
 - 2元対称通信路になる
 - 元の情報0を誤って1と判断する確率



$$p = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-S)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma}{S}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

14

KYOTO UNIVERSITY