中間テスト（場所に注意）

日時：第8回 １２月２日（月）1限

場所：**物理系校舎　3階　313講義室**

（いつもと異なります）

KYOTO UNIVERSITY

アルゴリズムとデータ構造⑥
～ 探索問題（２分探索木）～

鹿島久嗣

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY

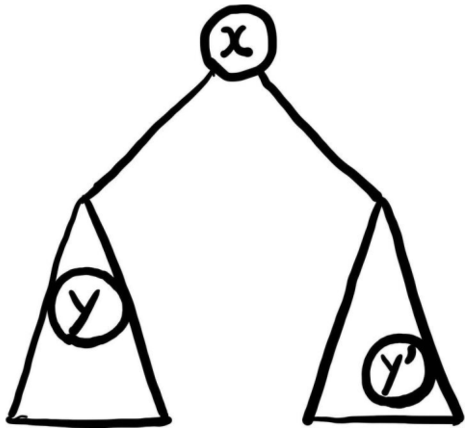
探索問題：
データ集合から所望の要素を見つける

- 探索問題は、データの集合から所望のデータを見つけてくる
  - データは「キー」と「（データの）内容」からなる
  - 与えられたキーに一致するキーをもったデータを見つける
- 2分探索木やハッシュ等によって実現可能

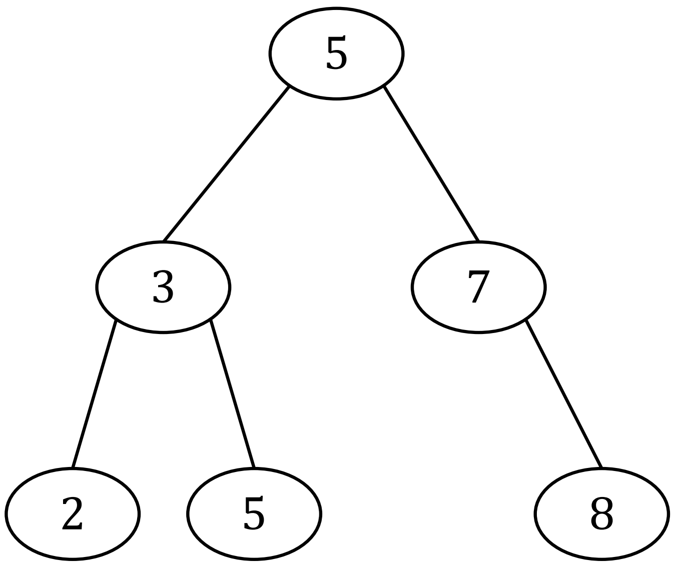
２分探索木

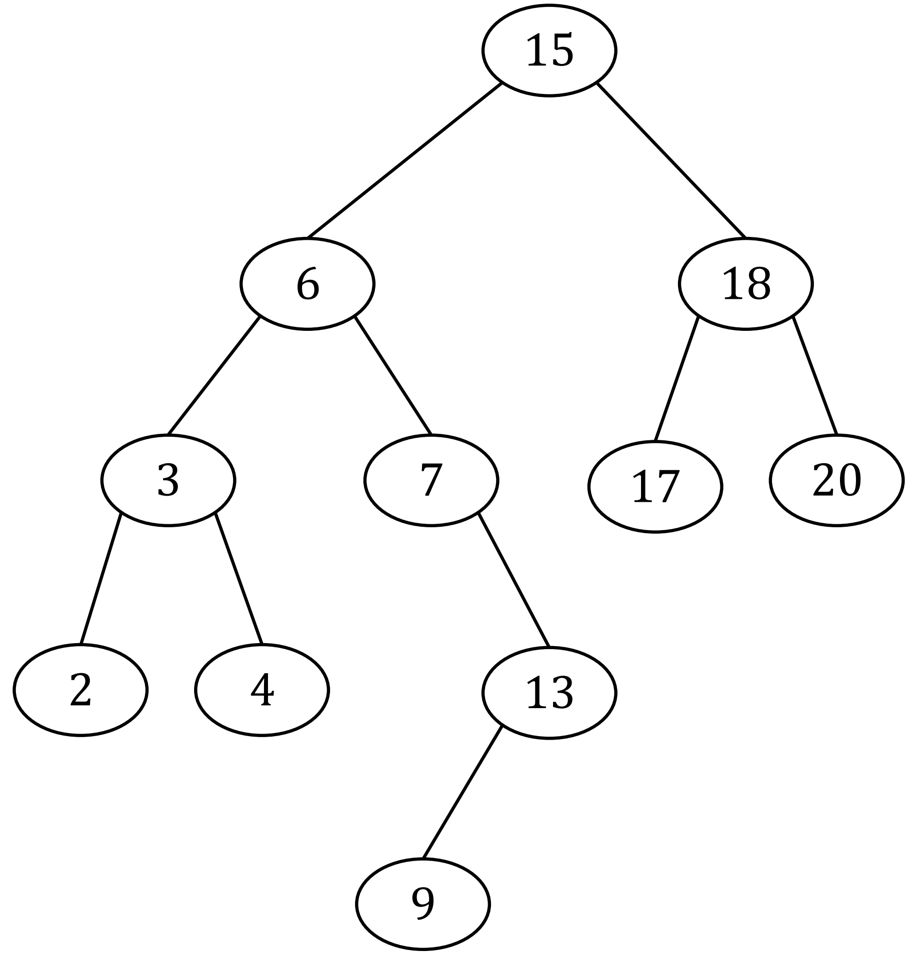
２分探索木：
データ集合から所望の要素を見つけるデータ構造

- 各節点が key, left（左の子）, right（右の子）, p（親） をそれぞれ最大１つもつ二分木
- キーには順序がつけられる； ２つの節点x, yに対して
  $$\mathrm{key}(x) = \mathrm{key}(y), \mathrm{key}(x) > \mathrm{key}(y),$$
  $$\mathrm{key}(x) < \mathrm{key}(y)$$
  のいずれかが成り立つ
- キーは以下の条件を満たす
  – $y \in x$の左の子を根とする部分木
  – $y' \in x$の右の子を根とする部分木
  – $\mathrm{key}(y) \leqq \mathrm{key}(x) \leqq \mathrm{key}(y')$



2分探索木の例：
2分探索木の条件を満たすことを確認





探索：
木の高さに比例する時間で可能

- キーの満たす条件を用いてO(h)で発見（ h は木の高さ）
- SEARCH(x, k)：これを「x =根」で呼ぶ; kは探したいkey

  if x = NULL または k = key(x) then xを返す

  if k < key(x) then SEARCH(left(x), k)：左にあるはず

  if k > key(x) then SEARCH(right(x), k) ：右にあるはず
- SEARCH(x, k)：再帰なしの方法

  while $x \neq$ NULL または $k \neq$ key(x)

  　　if k < key(x) then $x \leftarrow$ left(x) else $x \leftarrow$ right(x)

  end while; xを返す

２分探索木からソート済み配列を取り出す：中順での要素列挙

- ２分探索木から、全てのキーを整列された順で出力できる

INORDER(x)：中順での巡回（これをx ＝根で呼ぶ）

if xが葉 then key(x)を出力

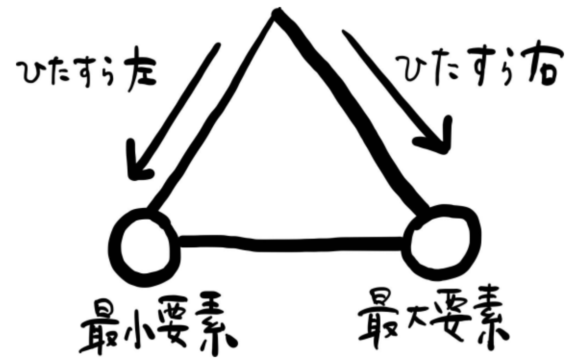
else

INORDER(left(x))：必ずx以下

key(x)を出力

INORDER(right(x))：必ずx以上

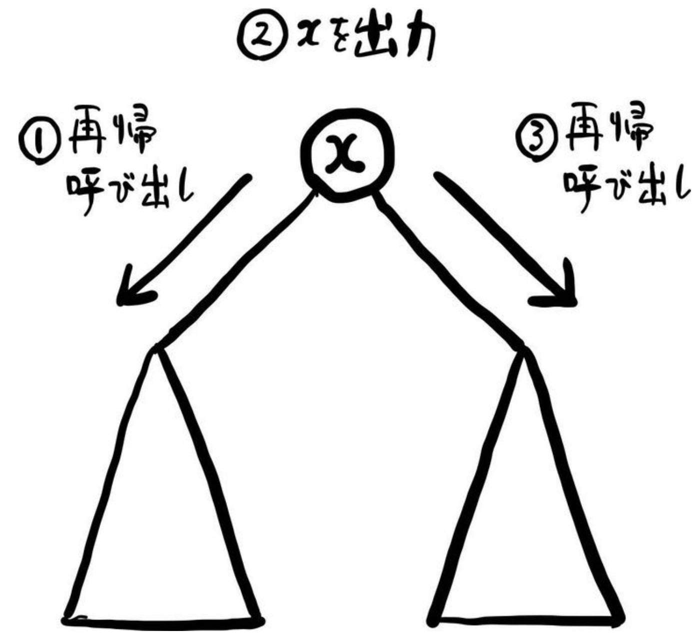
end if



- 最小（最大）の要素の発見であれば、left（right）をたたどることで$O(h)$で発見可能

前順・後順での巡回：
要素出力のタイミングによって異なる巡回順になる

- PREORDER(x)：前順での巡回
  - ② key(x)を出力
  - ① PREORDER(left(x))
  - ③ PREORDER(right(x))
- POSTORDER(x)：後順での巡回
  - ① POSTORDER(left(x))
  - ③ POSTORDER(right(x))
  - ② key(x)を出力
- 出力の位置に注意（中順は①→②→③）



次節点・前節点：
次に小さい（大きい）要素を取り出す

- 次節点(successor)：中順で次の節点（≒次に小さい）
- 前節点（predecessor）：中順でひとつ前の節点
- SUCCESSOR(x)：次節点の発見

if right(x) $\neq$ NULL then MININUM(right(x))

右の子がいるなら
その右部分木の
最小要素

$y \leftarrow$ parent(x)

自分が親の左の子なら親が
次節点

while $y \neq$ NULL かつ $x =$ right(y)

  $x \leftarrow y$; $y \leftarrow$ parent(x)

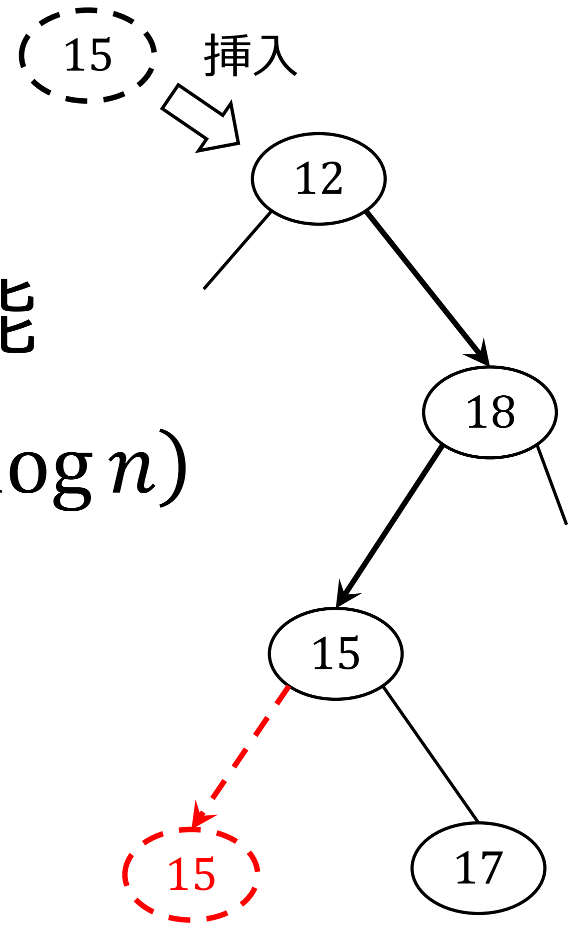
自分が親の右の子である限
り上がっていく

end while

xを返す

二分探索木への挿入と削除：挿入は$O(h)$で可能

- 探索と同様にkeyの比較で辿っていき、該当する節点がなくなった時にそこに入れる
- 高さhの木では$O(h)$時間かかる
- これを繰り返して２分探索木を構成可能
  – ランダムな順で挿入すれば平均高さ$O(\log n)$



二分探索木への挿入と削除：削除

- ３つの場合に分けて考える

1. 削除する節点zが葉のときは単に削除
2. zの子が1つの場合： zを削除して子をその位置に移動
3. zの子が2つの場合：
   1. zの次節点yを見つける（yはzの右の子孫の最小要素）
   2. yを削除して、zの位置にyを入れる
      - yの子は高々１個(右の子)なのでyの削除は容易
      - 子孫との大小関係が保たれていることに注意

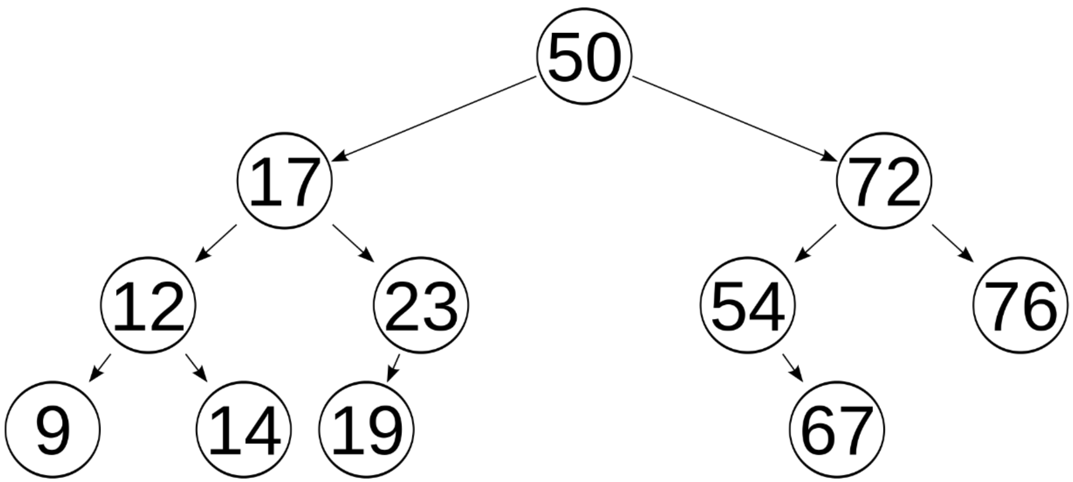
平衡木

平衡木：
バランスのとれた２分探索木

- ２分探索木をもちいた探索のコストは、根から所望の節点までの道のりの長さ（無い場合には葉までの長さ）
- ２分探索木が完全２分木に近い場合には$O(\log n)$だが、バランスが悪いとコストがかかる場合がある
- 平衡木：木の高さ（根から葉までの道のりの長さ）が常に$O(\log n)$であるような探索木
  - AVL木、赤黒木、スプレー木、B木、…

AVL木：
バランスのとれた２分探索木

- どの節点についても、右の部分木と左の部分木の高さの差が最大１であるような２分探索木



https://ja.wikipedia.org/wiki/AVL%E6%9C%A8#/media/File:AVLtreef.svg

AVL木の性能：最悪ケースで$O(\log n)$

- ２分木のなかで最も低いものは完全２分木（$\log n$）
- いっぽう、もっとも高いものが最悪ケース
  - 頂点数nをもつ２分木のなかで最も高いもの

  ⇔ 高さhの２分木のうち、もっとも頂点数が少ないもの
  - 高さhのAVL木の最小の頂点数をN_hとすると

$$N_h = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+3}\right) - 1 \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+3}$$ (hが大のとき)

  - つまり $h = \dfrac{\log n}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} - 3 \approx 1.44 \log n$ （最良ケースの1.44倍）

補足：
なるべくバランスの悪いAVL木をつくる

- 高さhのAVL木の最小の頂点数をN_hとすると

$$N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$$

- $f_h = N_h + 1$とすれば $f_h = f_{h-1} + f_{h-2}$ （フィボナッチ数列）

- フィボナッチ数列の解：

$$f_h = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+3}\right)$$