KYOTO UNIVERSITY

アルゴリズムとデータ構造⑪
～ 問題の難しさ ～

鹿島久嗣

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY

問題の難しさのクラス：

- クラスP
- クラスNP
- P≠NP予想
- NP完全
- NP困難

問題の難しさ：
もっとも計算量の小さいアルゴリズムで測る

- 我々は、アルゴリズムの効率の良し悪しを計算量で測る
- では、問題の難しさはどう測るか？
- 問題Qに対するアルゴリズムの集合$A(Q)$を考える
- 問題Qの難しさを、最も計算量が小さい $a \in A(Q)$ の計算量で測ることにする
- 例：ソート問題の計算量の下界は $O(n \log n)$
  - （理論的には）これより高速なアルゴリズムを探す必要はない

クラスP：
多項式時間アルゴリズムが存在する問題のクラス

- 決定問題を考える
  - 決定問題：YesかNoで答えられる問題
- 理論的には、
  問題が難しいか？ ＝ 問題が多項式時間で解けるか？
  に興味がある
- クラスP：
  多項式時間アルゴリズムが存在するような問題のクラス

クラスNP：
非決定的な計算機で多項式時間で解けるクラス

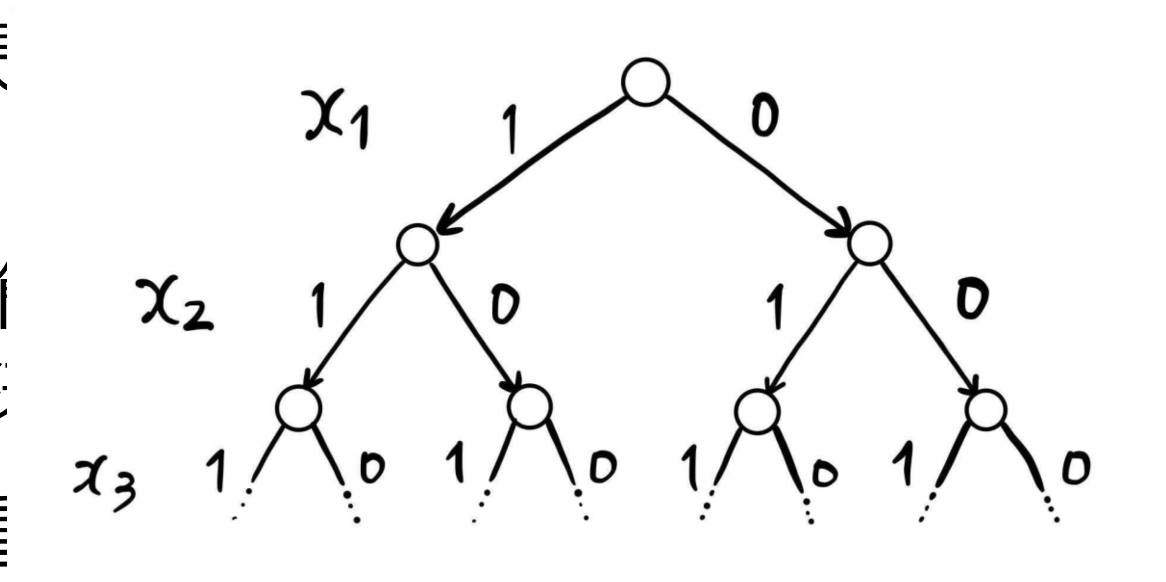
- 非決定的な計算機を考える：
  - 好きなだけ並列化できる理想的な計算機
    - プロセスをk分岐して、並列実行できる命令がある
  - $O(n)$時間でnビットのベクトルをすべて調べることができる
- NP：問題の答えが「Yes」のときには、非決定的な計算機を使って、多項式時間でこれを調べることのできる問題
  - もう少し簡単な定義：答えの候補が与えられたときに、答えの正しさを（決定的な計算機で）多項式時間で検証できる問題
- 実用上重要な問題は、ほぼこのクラスに入る

クラスNP：
非決定的な計算機で多項式時間で解けるクラス

- 非決定的な計算機を考える：
  - 好きなだけ並列化できる理想的な計算機

    順列、$C(n,m)$など

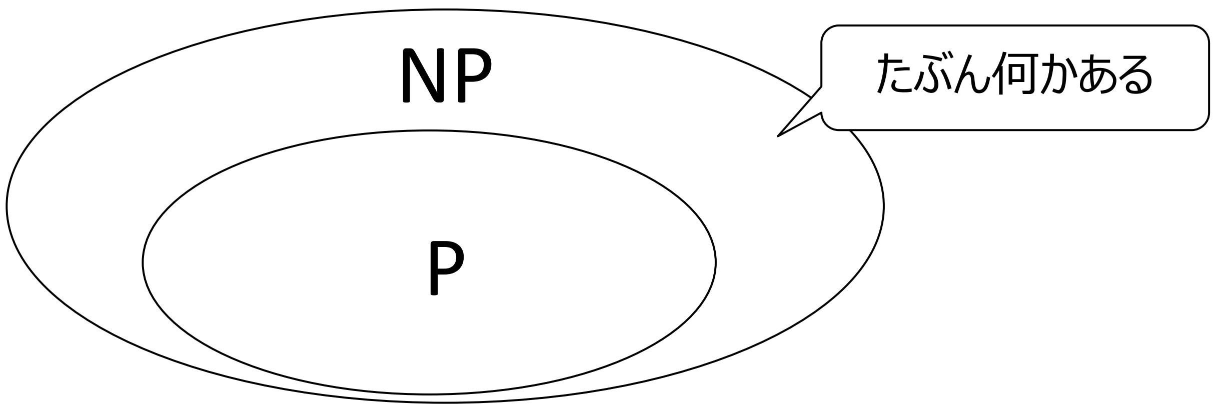
    - プロセスをk分岐して、並列実行できる命令がある
  - $O(n)$時間でnビットのベクトルをすべて調べることができる
- NP：問 … 的な計算機を使って、 … きる問題
  - もう少し … きに、答えの正しさを（ … できる問題
- 実用上 …



P≠NP予想：
おそらく、NPはPよりも難しい

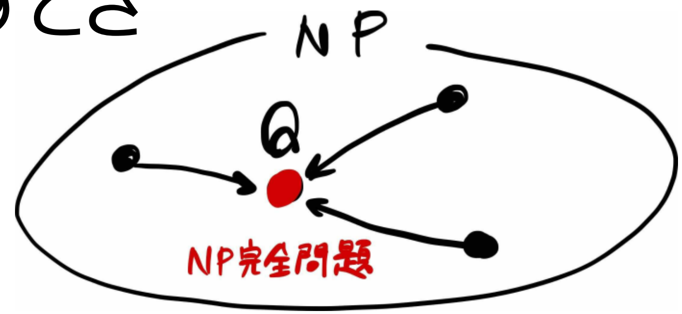
- 「クラスNPに属するが、Pには属さない問題」は、これまでに見つかっていない（！）
  - $P \subseteq NP$ であるが、P≠NPかどうかは、まだ分かっていない

    （※ 解けたら100万ドルの賞金）
  - おそらく、P≠NPであるとみんな思っている



NP完全：
NPの中でもっとも難しい問題

- NP完全： 判定問題Qは以下を満たすとき NP完全に属するという

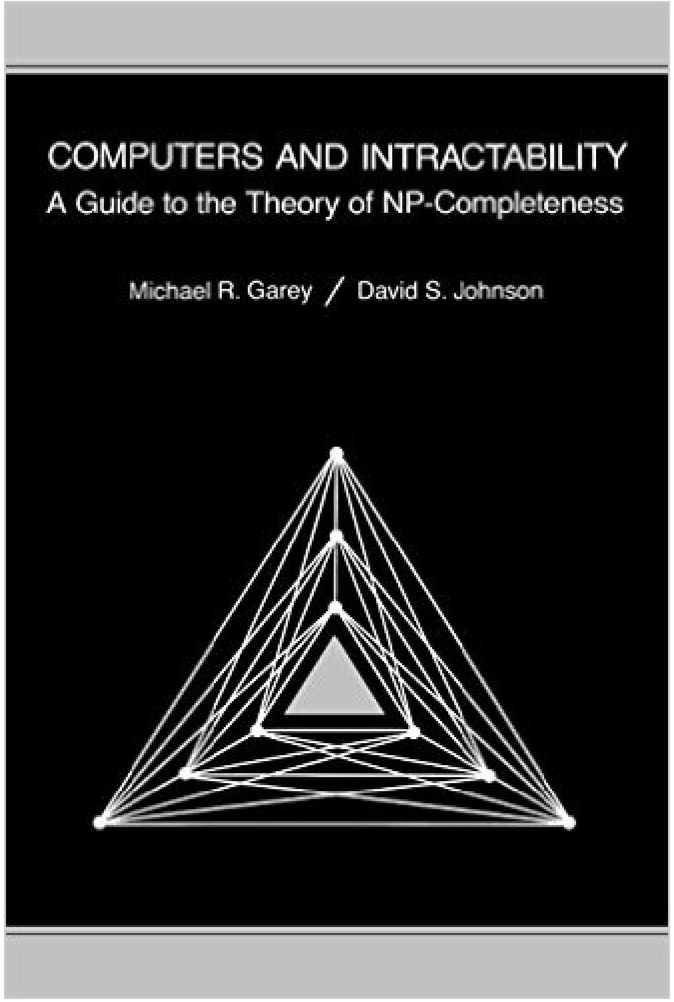


  - QはNPに属する
  - NPの任意の問題が多項式時間でQに変換できる

- もし、NP完全問題Q が クラスP に属するならば、NPに属する全ての問題はPに属することになる
  - なぜならば、NP完全問題Qが多項式時間で解ければ、ほかのNP問題も多項式時間で解けることになるから

NP完全問題の例：
多くの重要な問題がNP完全

- ハミルトン閉路問題
- クリーク問題
- 頂点被覆問題
- 集合被覆問題

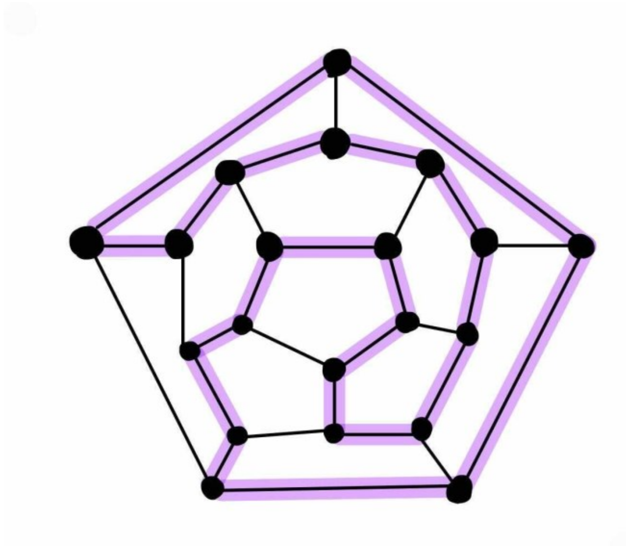


- 新たな問題に出会ったときには、それがNP完全などでないかをチェックすべし

NP完全問題の例：ハミルトン閉路問題

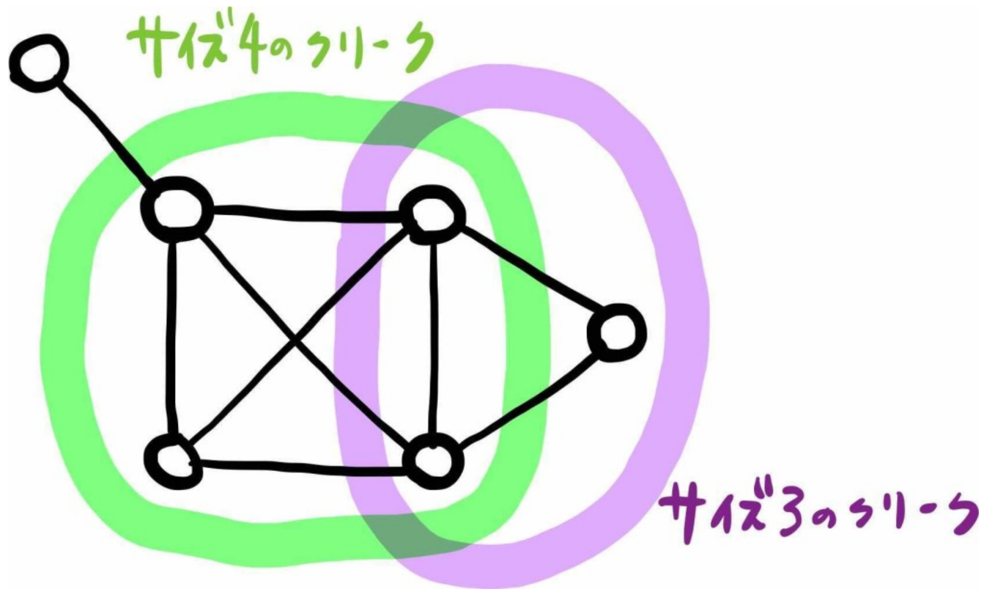
- ハミルトン閉路：
  グラフ$G = (V, E)$において、すべての頂点 をちょうど1回ずつ訪れて出発点に戻る道（閉路）

- ハミルトン閉路問題：
  Gがハミルトン閉路をもつかどうかの決定問題



NP完全問題の例：クリーク問題

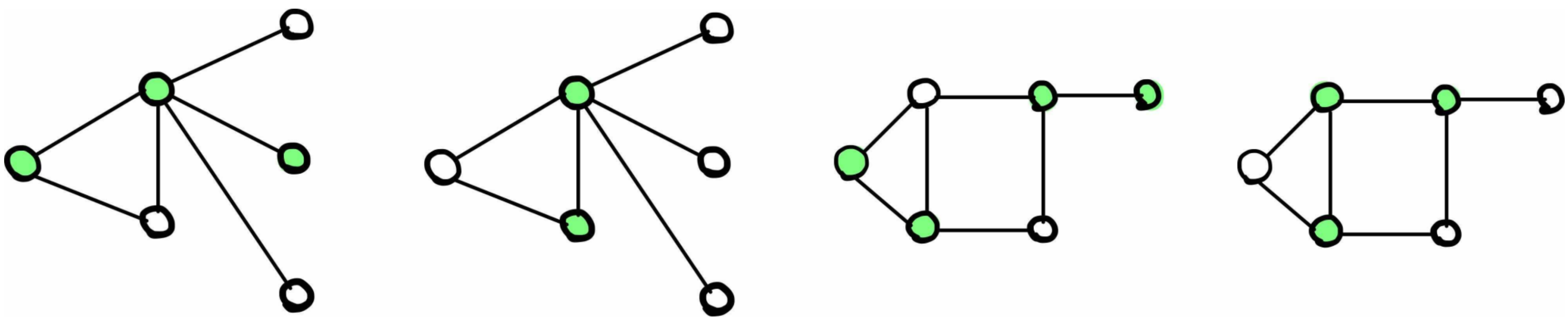
- クリーク：Gの部分グラフG'であって、G'の全ての頂点対が互いに辺でつながれているもの
- クリーク問題：Gが頂点数kのクリークをもつかどうかの決定問題



NP完全問題の例：
頂点被覆問題

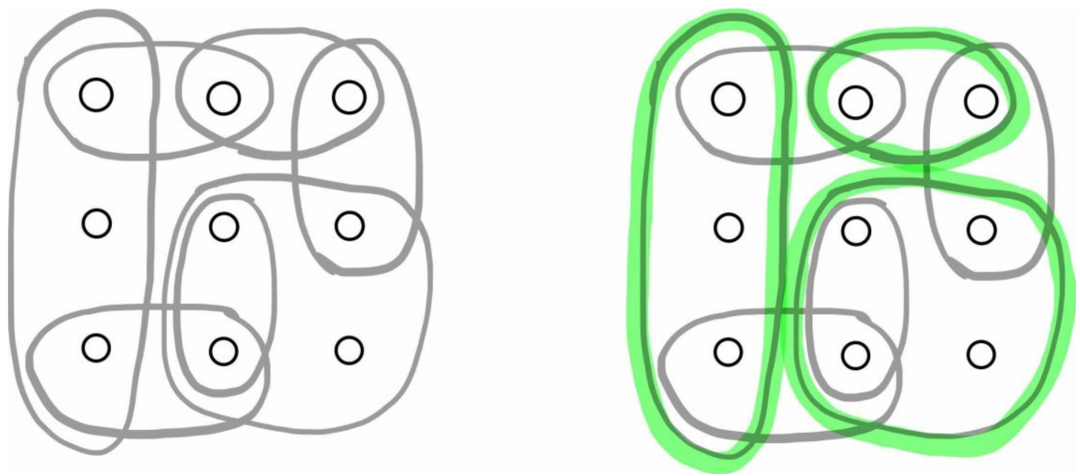
- グラフ$G = (V, E)$において全ての$e \in E$の少なくとも一方が$V' \subseteq V$に含まれているとき、V'を頂点被覆という
- 頂点被覆問題（vertex cover）：
  Gが頂点数kの頂点被覆をもつかどうかの決定問題

頂点「で」被覆



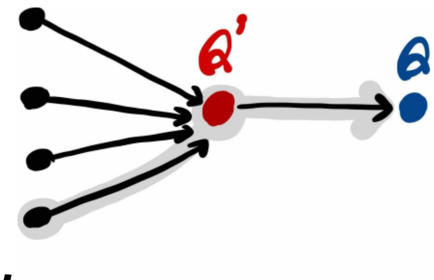
NP完全問題の例：集合被覆問題

- n個の集合$S_1, S_2, \ldots, S_n$があるとき、そのうちk個を用いて$\bigcup_{j=1}^{n} S_j = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$とできるとき、大きさ$k$の集合被覆という
- 集合被覆問題（set cover）： 集合「で」被覆
$S_1, \ldots, S_n$が大きさkの集合被覆をもつかどうかの決定問題



NP完全であることの証明法：多項式時間帰着によって示す

- ある問題QがNP完全であることを示すためには、あるNP完全問題Q’からQに多項式時間で帰着できることを示す
  - Q’の任意の問題例をQの問題例に、多項式時間で対応付けることができることを示す
  - Qの問題例の解がYesなら、Q’の問題例の解もYes、逆に、QがNoならQ’でもNo

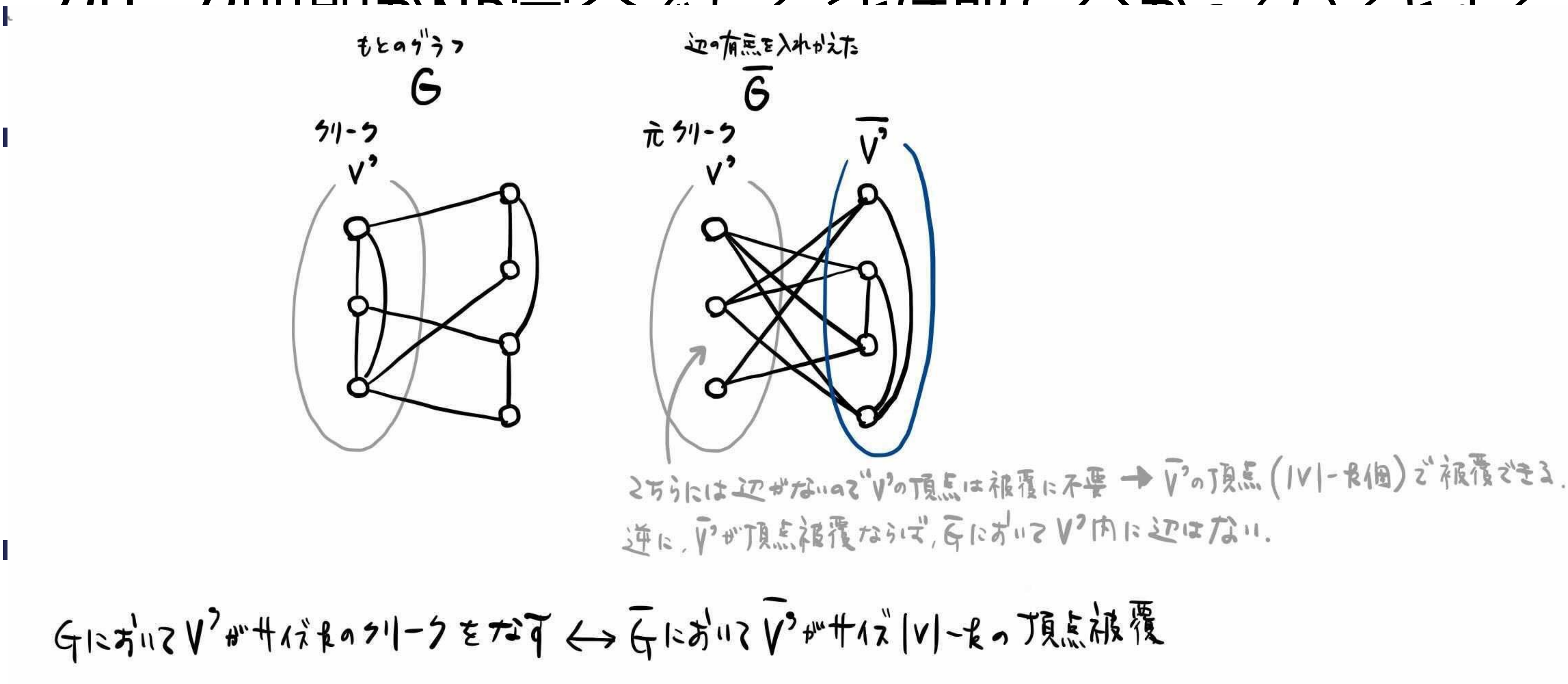


- なお、最初のNP完全問題は定義に従い示す必要がある
  - 充足可能性問題（SAT）：与えられた論理式を真にする論理変数の割り当てが存在するかを判定する問題

NP完全性の証明の例：
クリーク問題→頂点被覆問題→集合被覆問題の順に帰着

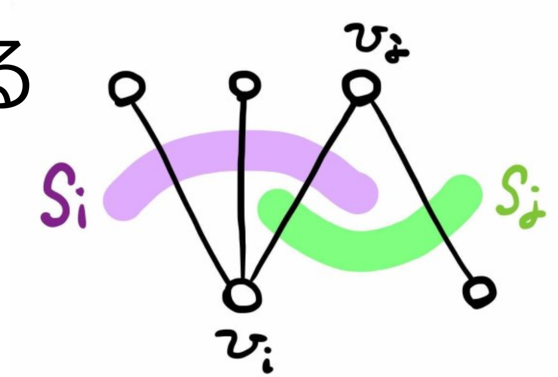
- クリーク問題がNP完全であることは既に分かっているとする
- 頂点被覆問題はNP完全
  - クリーク問題から頂点被覆問題に多項式時間帰着
    - もとのグラフGで、辺のあるところとないところを逆転したグラフG'上での、（サイズ$|V|-k$の）頂点被覆問題
- 集合被覆問題はNP完全
  - 頂点被覆問題から集合被覆問題に多項式時間帰着

NP完全性の証明の例：
クリーク問題→頂点被覆問題→集合被覆問題の順に帰着



集合被覆問題のNP完全性：頂点被覆問題からの帰着法

- 集合被覆問題のNP完全性を、頂点被覆問題からの帰着によって証明する



- Vの頂点$v_1, \dots, v_n$のそれぞれに対して、v_iに接続するすべての辺の集合をS_iとする（頂点被覆においてv_iが被覆できる辺の集合）
- $S_1, \dots, S_n$に対する集合被覆問題 ⇔ もとの頂点被覆問題
  – 頂点v_iを選ぶと、辺集合S_iがカバーされる
- 問題の変換は$O(|V|^2)$でできる

NP困難：
NPのどの問題と比較しても、それ以上に難しい問題

- NP困難問題Q：
  - NPの任意の問題が多項式時間でQに変換できる
    （必ずしもQがNPに入っている必要はない）
  - 判定問題とは限らない問題Qが、
    NP完全問題Q'を部分問題として含むもの
- 巡回セールスマン問題：
  ハミルトン閉路のなかでコストが最小のものを求める問題
  - これが解ければついでにハミルトン閉路も解ける
- 同様に、最大クリーク、最小頂点被覆、最小集合被覆、…