Kyoto University

# アルゴリズムとデータ構造③
## ～ リスト・ソート・ヒープソート ～

鹿島久嗣
（計算機科学コース）

Department of Intelligence Science and Technology

# リスト

# 集合を管理するデータ構造：データを保持するための基本データ構造

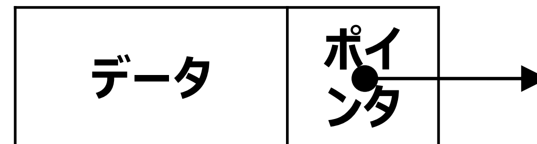
- 集合を管理するデータ構造
  - データをコンピュータのメモリにどのように保持するか
- 提供すべき機能：
  - 集合への要素の追加
  - 集合からの要素の削除
  - 集合内での要素の検索
- たとえば、配列ならば…：
  - メモリを必要分確保しておき、順次保管する
  - 所望の位置にアクセス可能だが、削除が面倒

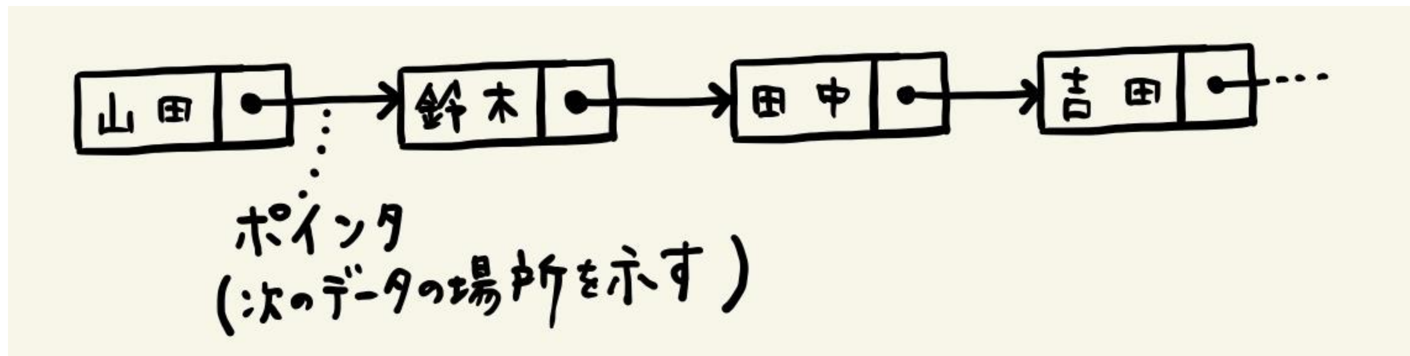
配列による集合の管理

| 番地 | データ |
|---|---|
| 1 | 山田 |
| 2 | 鈴木 |
| 3 | 田中 |
| 4 | 吉田 |
| ⋮ | ⋮ |

# リスト：<br>集合を管理する基本データ構造

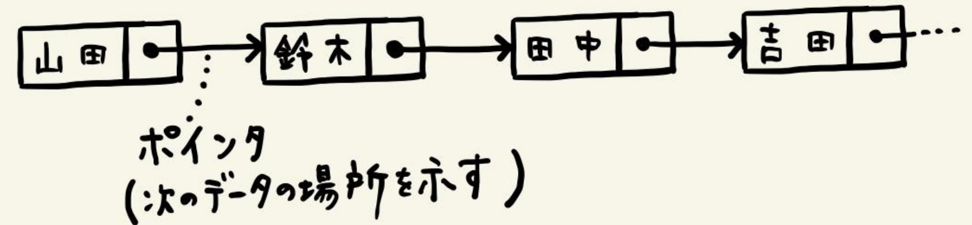
- リスト：データをポインタで一列につなげたもの
  - ポインタ：次のデータの場所（番地）を示す



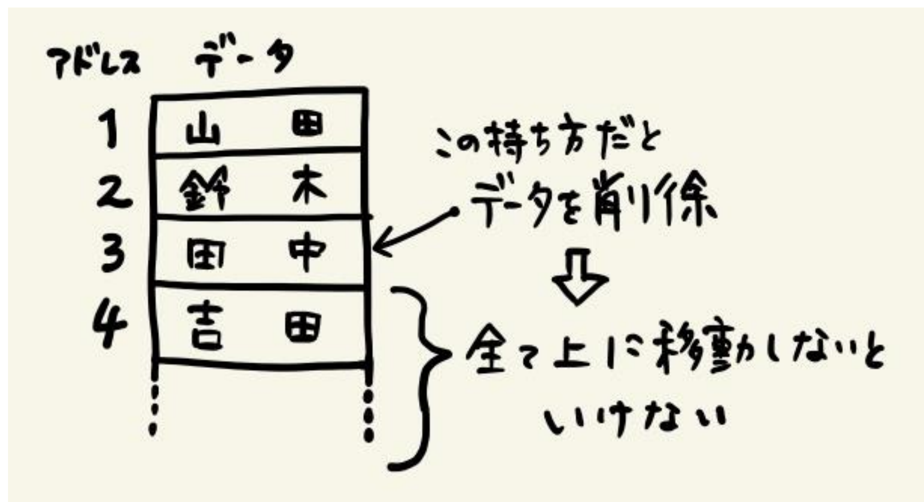



# リストの利点：<br>データを動的に追加・削除可能

- リストは、必要に応じてメモリを確保できる
  - 後ろに繋げていけばよい



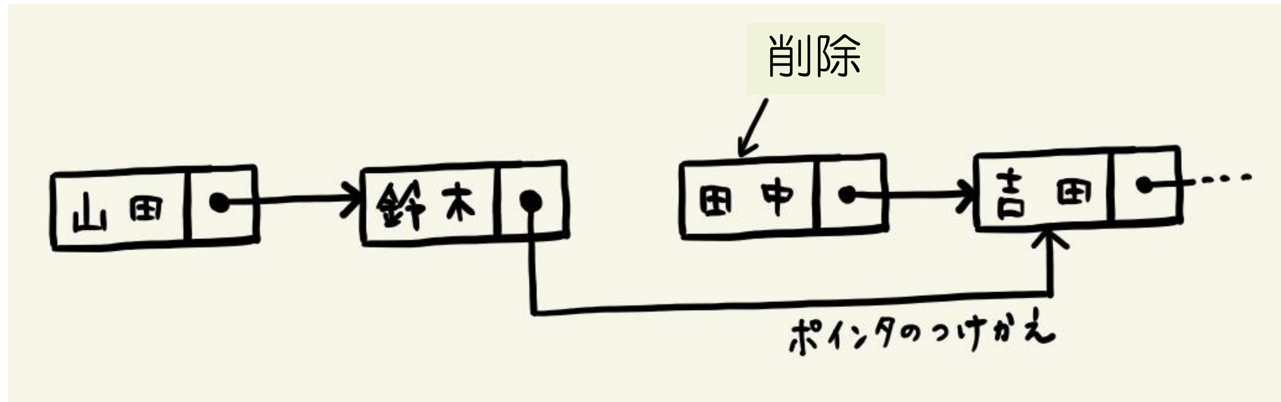

- 追加・削除が容易
  - 配列でもつと削除が大変になる



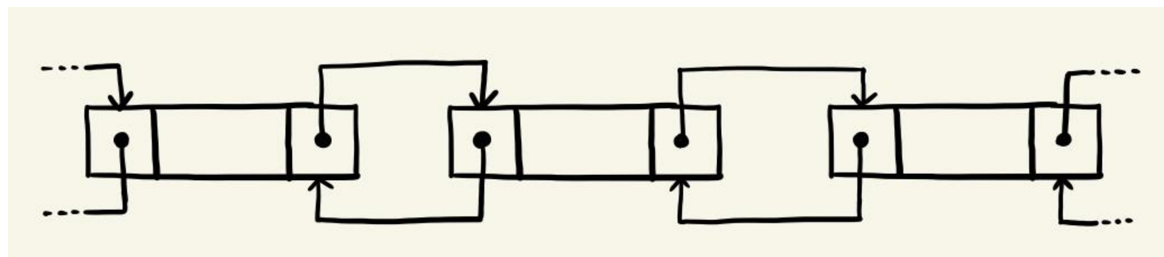

- 検索では得しない（効率的な検索には別の仕組が必要）

# リストの利点：
# データを動的に追加・削除可能

- 削除：ポインタの付け替えで対応

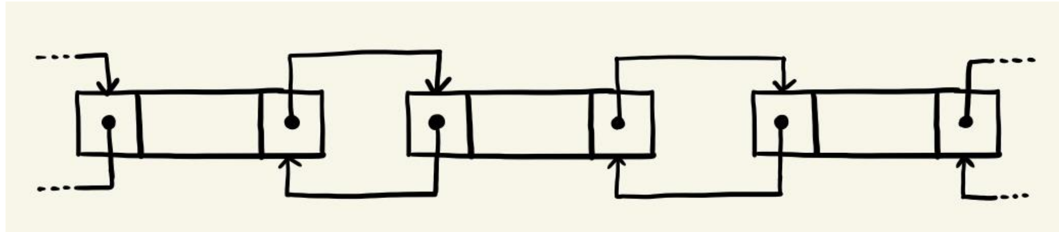



  - ポインタのつけかえには、誰が自分にポインタを指しているかを知る必要がある（単純には$O(n)$）
  - 二重線形リスト： $O(1)$ で発見可能

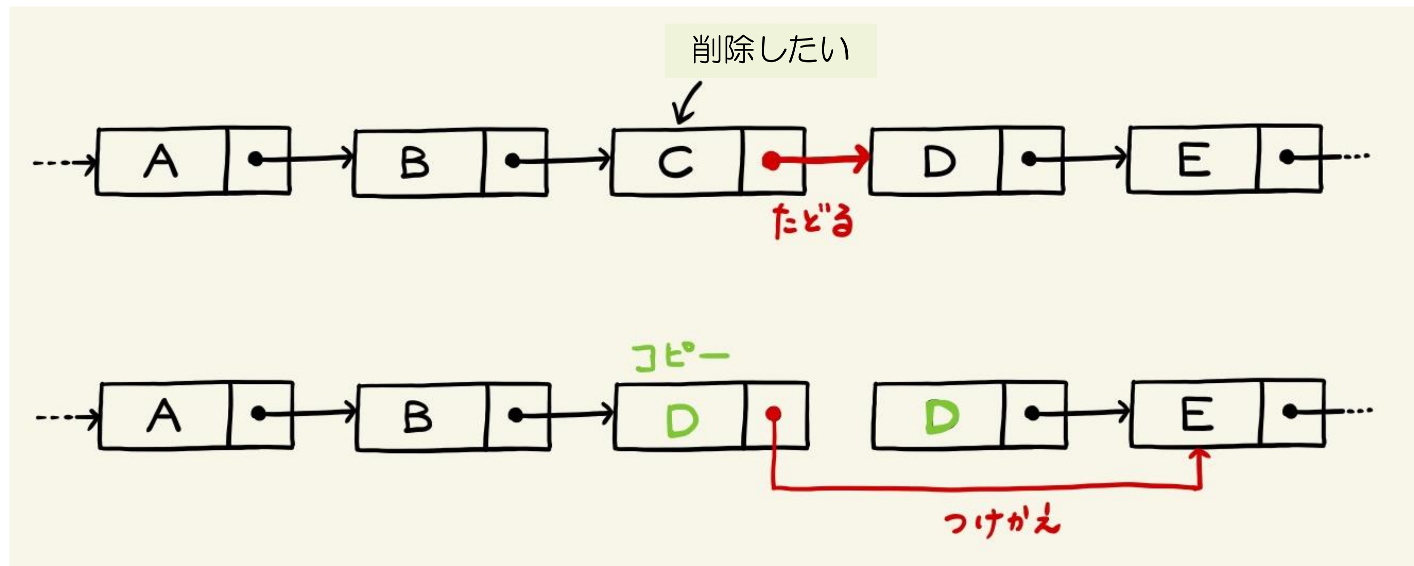


# リストの利点：
# データを動的に追加・削除可能

- 二重線形リストは O(1) で削除できるがポインタが2つ必要

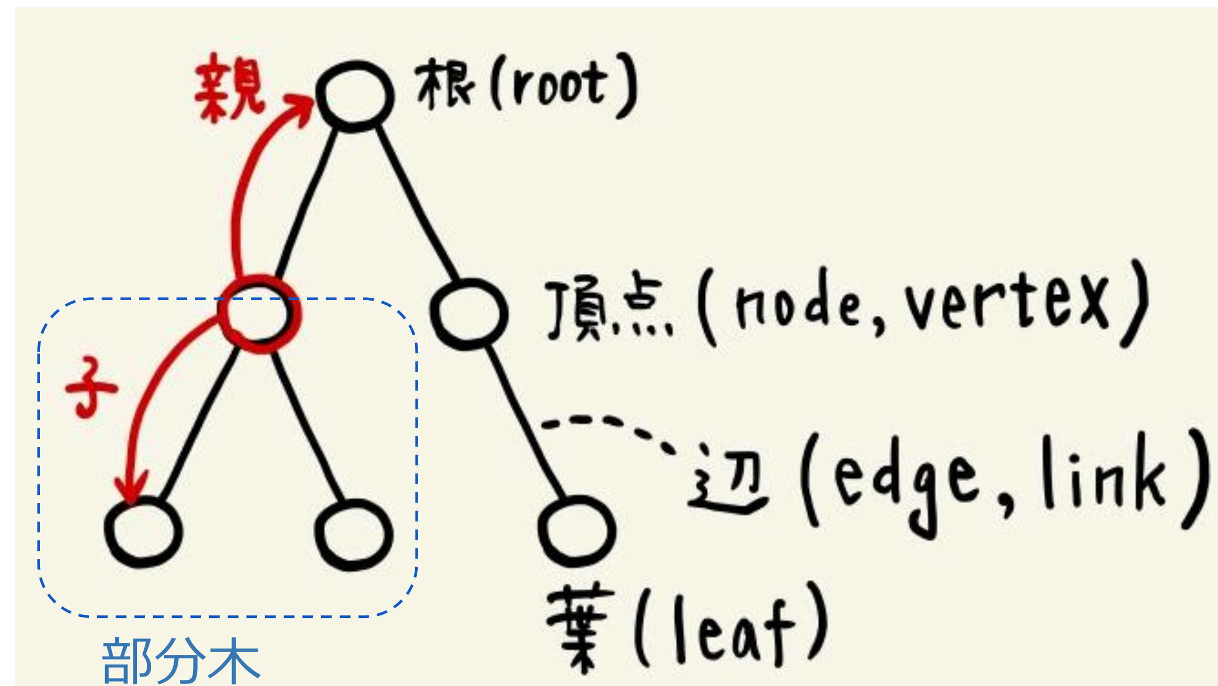


- 実は二重にしなくても可能：たどる→コピー→付け替え



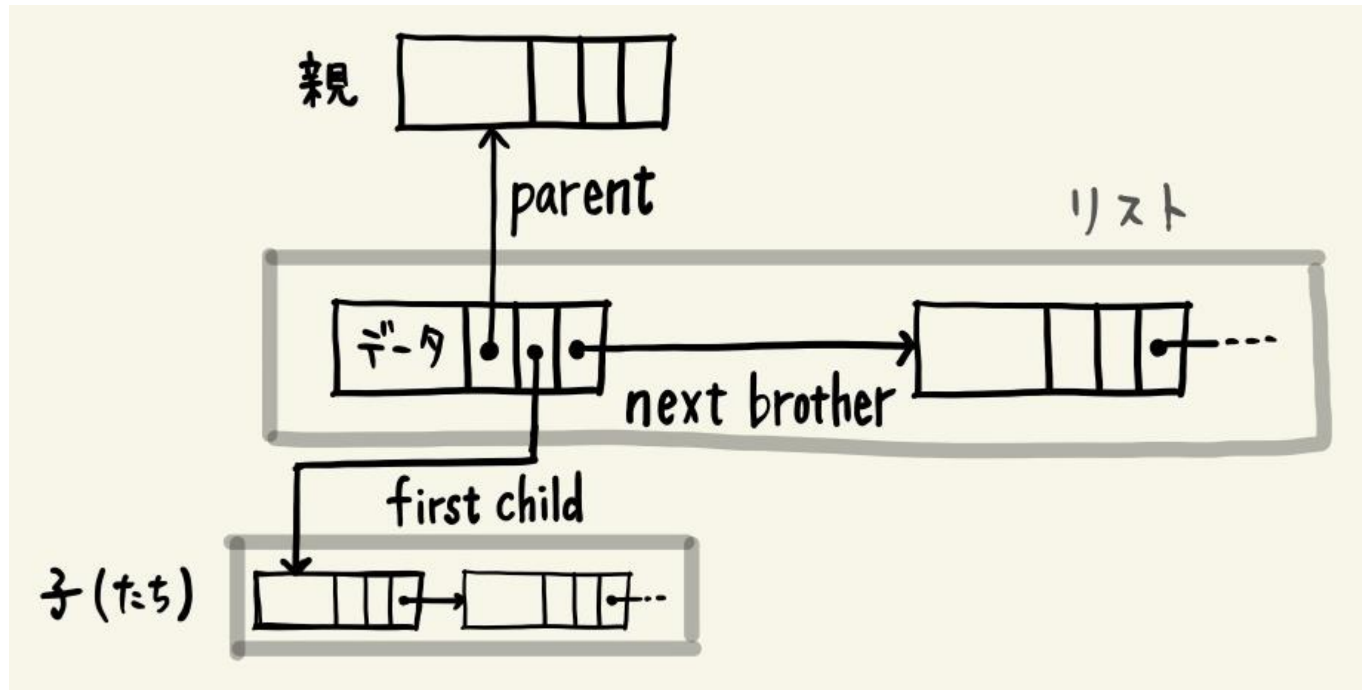
# 根付き木：
# 枝分かれするリストの一般化

- 頂点集合と、それらを結ぶ辺から構成される
  - 辺に接続する頂点の片方が親でもう一方を子とする
  - 各頂点は0～複数個の子をもつ
  - 根以外の頂点は、必ずただひとつの親頂点をもつ
  - 葉：子をもたない頂点
  - 部分木：
    ある頂点以下の部分



# 根付き木の実現：各頂点が3個のポインタをもつ

- 各頂点は親へのポインタ、次のきょうだいへのポインタ、最初の子へのポインタをもつ
  - 全ての子へのポインタをもつかわりに最初の子だけを指す
    - 各頂点は最大3個のポインタを保持



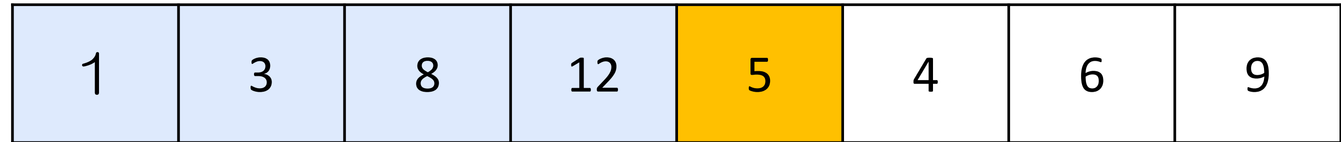
# 整列（ソート）のアルゴリズム

# 整列問題（ソート）：<br>要素を小さい順に並び替える問題

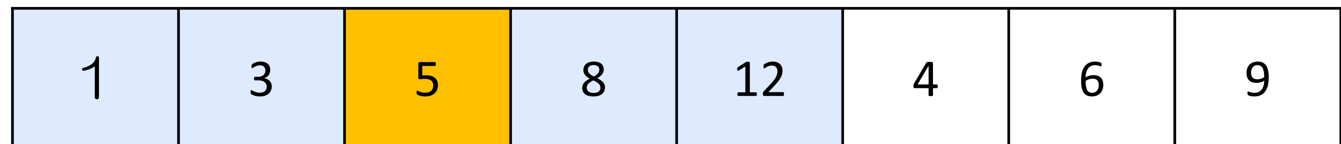
- 整列問題
  - 入力：$n$個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が入った配列
  - 出力： $a_{1'} \leqq a_{2'} \leqq \ldots \leqq a_{n'}$ を満たす、入力列の置換
- 例：入力 $(4, 5, 2, 1) \rightarrow$ 出力 $(1, 2, 4, 5)$

# 単純なソートアルゴリズム：<br>ソート済み領域を左から順に拡大していく

- ある時点において、現在の位置よりも左の部分は整列済みとする




- 現在の位置から左に見ていき、順序が保たれるところまで移動する



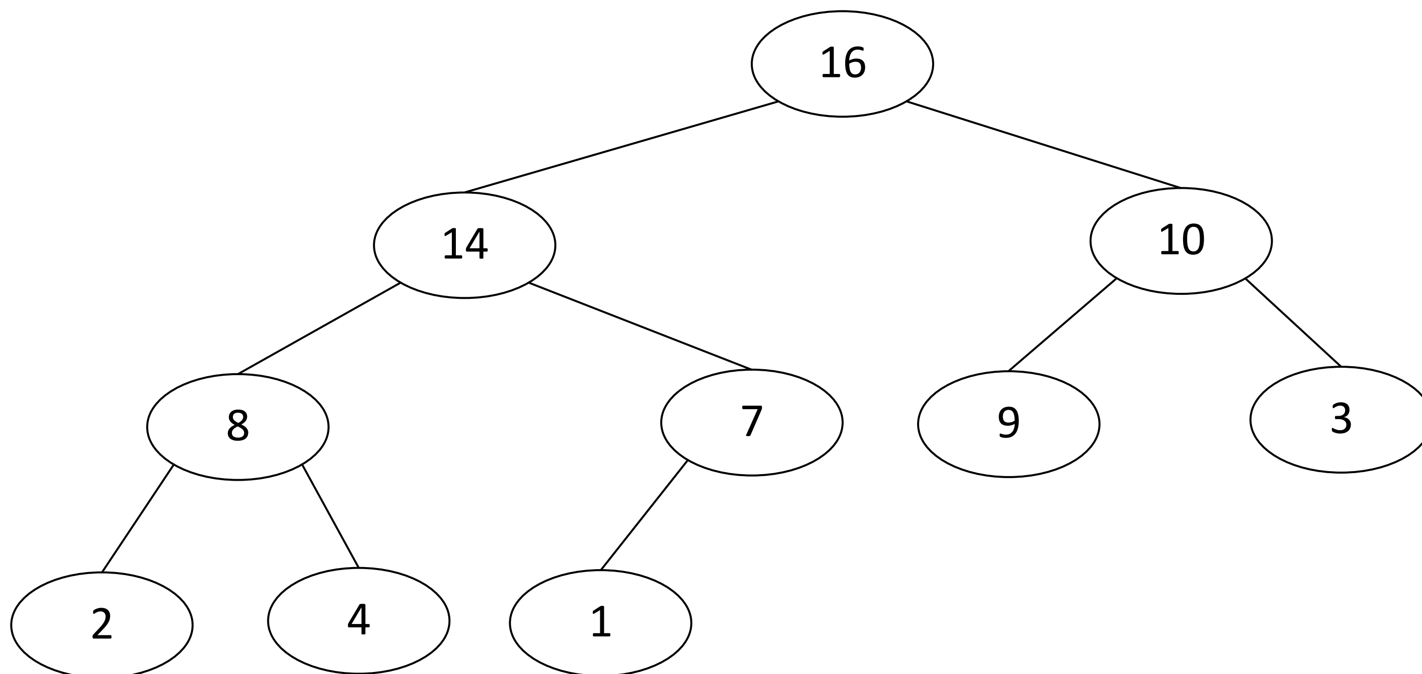
# 単純なソートアルゴリズムの計算量：
# 計算効率はそれほど良くないが省スペースで実行可能

- 「現在の位置から左に見ていき、順序が保たれるところまで移動する」アルゴリズム
- 現在の位置が$j$であるとすると、「・・・」の操作には$O(j)$回の比較・交換が必要
- これを $j = 1,2,..,n$ まで行うと $\Sigma_{j=1,\ldots,n} O(j) = O(n^2)$ になる
- このアルゴリズムはあまり効率はよくない
  - 効率の良いアルゴリズムは$O(n \log n)$ （後述）
- ただし、「その場でのソート」が可能なので省スペース
  - 入力配列以外に定数個の領域しか使用しない

# ヒープソート

# ヒープソート：データ構造「ヒープ」を使った$O(n \log n)$のソート法

- 「ヒープ」とよばれるデータ構造の一種を用いたソート法
- $O(n \log n)$ で動く「その場での」ソート法
  - $O(n \log n)$はソートの最悪計算量としてはベスト



# ヒープ：<br>ヒープ条件をみたす完全2分木

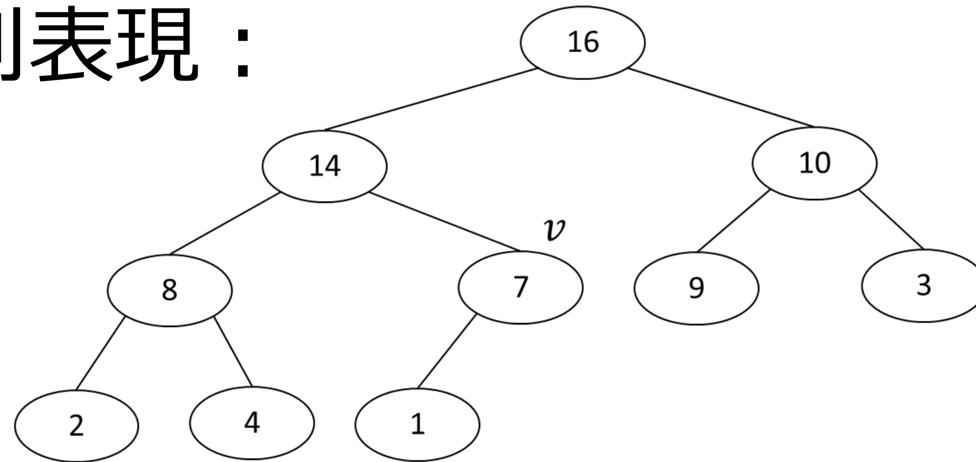
- ヒープは（ほぼ）完全2分木である
  - 2分木：全頂点の子数が最大2個の根付き木
  - 完全2分木：葉以外の頂点の子がちょうど2個で、すべての葉の高さが等しい2分木
- ヒープの各頂点はデータをひとつずつもち、必ず「ヒープ条件」を満たしていなければならない
  - ヒープ条件：ある頂点のデータの値は、その親のもつデータの値以下である

$$A[\mathrm{parent}(i)] \geq A[i]$$

- $n$頂点をもつヒープの高さは $\Theta(\log n)$

# ヒープの表現：<br>ヒープは配列で一意に表現できる

- ヒープと等価な配列表現：




$\Rightarrow$ $A$

| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

- 配列表現の性質：
  - 頂点$i$の左の子は$2i$番目、右の子は$2i+1$番目
  - 頂点$i$の親は$\lfloor i/2 \rfloor$ 番目に入っている

# ヒープソート：「根の値の取出し」と「木の更新」を繰り返してソートを実行

- ヒープの根には最大の値が入っている
- 大まかには以下の方法で小さい順に並べることができる：

1. ヒープを構成する（ $O(n)$ ：後述）
2. 根と、最も深く、最も右にある頂点（＝配列表現の場合は一番最後の要素）と交換する
3. 木（＝配列）のサイズをひとつ小さくする
4. 根が入れ替わったことでヒープ条件が満たされなくなっているので、ヒープを更新（ $O(\log n)$ ）する
5. 以上を頂点がなくなるまで繰り返す（→ステップ2）

# ヒープソート：
# 「根の値の取出

# ヒープソート：<br>「根の値の取出し」と「木の更新」を繰り返してソートを実行

- ヒープの根には最大の値が入っている
- 大まかには以下の方法で小さい順に並べることができる：

1. ヒープを構成する（ $O(n)$ ：後述 ）
2. 根と、最も深く、最も右にある頂点（＝配列表現の場合は一番最後の要素）と交換する
3. 木（＝配列）のサイズをひとつ小さくする
4. **根が入れ替わったことでヒープ条件が満たされなくなっているので、ヒープを更新（ $\mathbf{O(\log n)}$ ）する**
5. 以上を頂点がなくなるまで繰り返す（→ステップ2）

# 根のヒープ条件の回復：<br>根から下に辿り$O(\log n)$でヒープ条件を回復

- HEAPIFY$(A, i)$関数を考える：
  - 配列$A$（を木としてみたときの）頂点$i$以下の頂点をヒープ条件を満たすように更新する関数
  - ただし、頂点$i$の２つの子を根とする部分木はすでにヒープ条件を満たしているとする
    - 今回も、変更されたのは根だけなので、この条件が成立
- HEAPIFY$(A, i)$関数は、自身を再帰的に呼び出しながら、木の上から下へ向かって降りていく
  - $O(\log n)$で葉に到達する

# 根のヒープ条件の回復（詳細）
# 根から下に辿り$O(\log n)$でヒープ条件を回復

$\mathrm{HEAPIFY}(A, i)$

1. $i$ からスタート
2. $i$ とその左右の子を比較
   - if $i$ が最大 then 終了
   - else
     - 大きい方を$i$ と入れ替える
     - $i \leftarrow$入れ替えられた先の位置
     - $\mathrm{HEAPIFY}(A, i)$：自分自身を呼ぶ

- 計算量は$i$の高さを$h$として$O(h) \leq O(\log n)$

$i$ と２つの子の間のヒープ条件が満たされる

新しい$i$ とその子の間のヒープ条件の成立はまだ不明

# ヒープの構成：
# 木の下方から上方に向かって構成する

- 手続き：木の下から上に向かって（ヒープになっていない）木（＝配列）をヒープにする
- BUILD_HEAP($A$)

1. for $i \leftarrow \lfloor \text{length}(A)/2 \rfloor$ down to 1
2. do HEAPIFY($A, i$)
3. end for

子のある頂点を添え字の大きいほうから順に

$i$番目の頂点を根とする部分木がヒープ条件を満たすように更新する

- HEAPIFYが$O(\log n)$ステップ、これを$O(n)$回呼び出すので全体としては$O(n \log n)$の計算量
  – 実は注意深く評価すると$O(n)$（※ あとで示す）

# ヒープへの挿入：$O(\log n)$で実行可能

- ヒープに新たなデータ$x$を挿入する

$\mathrm{HEAP_INSERT}(A, x)$

1. 配列$A$ の最後に$x$を付け加える
2. $x$と$\mathrm{parent}(x)$を比較する
   - if $x \leq \mathrm{parent}(x)$ then 終了
   - else $x$と$\mathrm{parent}(x)$ を入れ替える
3. $x \leftarrow \mathrm{parent}(x)$
4. goto 2

ヒープ条件の確保

繰り返し回数は $O(\log n)$

- これを繰り返すことでヒープ構成も可能$O(n \log n)$

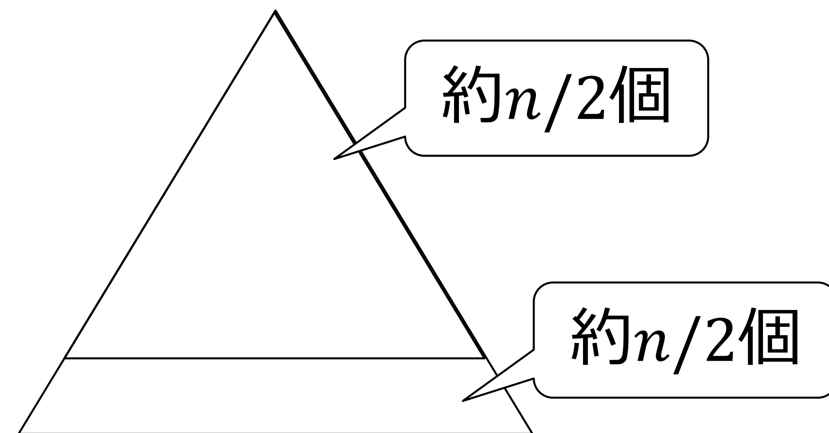
# ヒープ構成の計算量：挿入の繰り返しでも構成可能だが遅くなる

- HEAPIFYとHEAP_INSERTのどちらもヒープを構成可能：
  - HEAPIFYは上から下に向かってヒープ条件を回復
  - HEAP_INSERTは下から上に向かってヒープ条件を回復
- 計算量は異なる：
  - HEAPIFYを使った構成は$O(n)$（後述）
  - HEAP_INSERTは$O(n \log n)$
  - 計算量の差はどこからくるか？：
    - 2分木では、木の下方の頂点数が多い
    - ほとんどの頂点にとって 根からの距離 > 葉への距離

根より葉に近い頂点が多い

# ヒープ構成の計算量：
# HEAPIFYなら線形時間でヒープを構成可能

- 高さ$h$の位置に約 $n/2^h$個の頂点がある
  - 一番下の段にほぼ半分が
  - 次の段には、残りのうちほぼ半分が
  - ・・・
- $\sum_{h=1}^{\log n} h \cdot \frac{n}{2^h}$ を評価すると$O(n)$



# ヒープの応用：
# プライオリティ・キュー

- 優先度順にオブジェクトを取り出す仕組み
- 計算機のジョブ割り当て：
  - ジョブが終了 or 割り込み → 最大優先度のものを取り出す
  - 新しいジョブはINSERT
- シミュレーション：
  - 優先度＝時間として、時刻順にイベントを取り出す