確率数理要論レポート課題

2010 年 10 月 29 日 鹿島 久嗣 (10 月 25 日修正)

締め切り：12 月 3 日（金）12:00
鹿島の郵便受け（6 号館 1F）に提出
Due: December 3rd 12:00
Put your report into my mailbox (on the 1st floor in Faculty of Engineering Bldg. No.6)

問題 1. 確率収束するが概収束はしないような確率変数列の例をあげよ。
Problem 1. Give a random series which converges in probability, but does not converge almost surely.

問題 2. 確率変数列 $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$ が独立に同一分布に従う（$X_i \sim$ i.i.d.）とし、また $E[|X_i|] = \infty$ とする。このとき

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_i|}{n} = \infty\right) = 1$$

であることを示せ。
Problem 2. Suppose a series of random variables $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$ are independently identically distributed (i.e. $X_i \sim$ i.i.d.) and $E[|X_i|] = \infty$. Show that the following holds.

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_i|}{n} = \infty\right) = 1$$

問題 3. $A_m^\epsilon := \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \le \epsilon\}$ とおく。確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が確率変数 X に概収束することと

$$\forall\epsilon > 0\ \ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^\epsilon\right) = 1$$

となることの同値性を示せ。
Problem 3. Show the equivalence between almost sure convergence of a random series $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ to another random variable X and

$$\forall\epsilon > 0\ \ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^\epsilon\right) = 1$$

where $A_m^\epsilon := \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \le \epsilon\}$.

問題 4. $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ のそれぞれを事象とする。

a) 次を示せ。

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \cap \left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right) \supseteq \limsup_{n\to\infty} \left(A_n \cap B_n\right)$$

b) 上の等号が成立しない例と等号が成立する例を挙げよ。

Problem 4. Let $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ be events.

a) Show the following holds.

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \cap \left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right) \supseteq \limsup_{n\to\infty} \left(A_n \cap B_n\right)$$

b) Give an example where the equality holds in the above relation and an example where the equality does not hold.

問題 5. X が確率変数であり、g が R^1 上の可測関数であるとき

$$E[g(x)] = \int_{R^1} g(u)\mathrm{d}P_X(u)$$

を示せ。

Problem 5. Let X be any random variable and g be a measurable function over R^1. Show that

$$E[g(x)] = \int_{R^1} g(u)\mathrm{d}P_X(u).$$